Archiv

für

pathologische Anatomie und Physiologie

und für

klinische Medicin.

Bd. 159. (Fünfzehnte Folge Bd. IX.) Hft. 3.

XVIII.

Ueber ein neueres Verfahren bei Schädelcapacitäts-Messungen, sowie über eine methodische Untersuchung der Fehler bei Volumens- und Gewichts-Bestimmungen des Füllmateriales

von

Prof. Dr. Aurel von Török,

Director des anthropologischen Museums zu Budapest.

(Schluss.)

III. Die eigentliche Bedeutung der arithmetischen Mittelzahl bei kraniometrischen Zahlenreihen.

Wer je einen Blick auf die bisherige Geschichte der kraniometrischen Rassen-Forschung warf, der musste bemerken, dass die kraniometrischen Speculationen sich stets um die „arithmetische Mittelzahl", so zu sagen wie um eine feste Axe, drehten. Die Werthgrösse einer arithmetischen Mittelzahl wurde schon immer als die letzte Instanz in der Beweisführung bei irgendwelcher Rassen-Frage aufgefasst. Weil dieser Hülfsbegriff der sichersten Disciplin der Wissenschaften, der Mathematik entlehnt ist, so glaubte man, auf denselben felsenfest bauen und vertrauen zu können, ohne auch nur zu ahnen, wie schlüpfrig sich derselbe gerade bei den kraniometrischen Zahlenreihen erweist. — Es ist Thatsache, und dies genügt, dass geradezu eine der angesehensten Capacitäten in der Kraniologie sogar schon eine Gesetzmässigkeit in der Schädelformation lediglich auf die Beweiskraft von arithmetischen Mittelzahlen hin entdeckt zu haben angab.

Es hat sich im Laufe der Zeit die irrthümliche Auffassungsweise von der Bedeutung einer arithmetischen Mittelzahl in der Kraniologie derart eingebürgert, dass man genöthigt ist, vor Allem auf die elementarsten Fragen der Logik zurückzugreifen, um überhaupt eine gegenseitige Verständigung ermöglichen zu können. — Man darf also die Discussion gar nicht sogleich mit der „arithmetischen Mittelzahl“ beginnen, um nicht sofort in den Zauberkreis der vorgefassten Meinungen zu gerathen.

Wir wollen also, ganz abseits von der Frage der arithmetischen Mittelzahl, die Thatsachen der kraniometrischen Beobachtungen einer einfachen, aber etwas strenger logischen Betrachtung unterziehen.

Gehen wir von unserem speciellen Falle der kraniometrischen Zahlenreihen aus. — Wir haben in Heft 2 auf S. 270—273 die Zahlenreihen von je vier Volumens-Messungen und Gewichts-Bestimmungen vor uns, wie sie bei den einzelnen Capacitäts-Bestimmungen gefunden wurden. Innerhalb jeder dieser einzelnen Zahlenreihen folgen die einzelnen Werthgrössen des betreffenden Maasses so unregelmässig, so launenhaft aufeinander, dass, ohne weitere Kenntnisse über den Ursprung dieser Zahlenreihen, kein Verständiger etwas logisch Brauchbares aus diesen nackten Zahlenreihen herauszulesen vermag. Diese Zahlen sind an und für sich geheime Chiffres, zu deren Verständniss ein sogenannter Schlüssel nöthig ist. Diesen Entzifferungsschlüssel können wir nur auf künstliche Weise construiren. Das Erste, was wir hier zu wissen benöthigen, ist: um was es sich bei diesen Zahlengrössen handelt? Es handelt sich hier darum, eine gegebene Werthgrösse der Capacität eines Bronzeschädel-Étalons = 1258,8 ccm mittels Messungen wieder aufzufinden. Das Ergebniss dieser Messversuche war, dass das gesuchte Volumen in keinem einzigen Falle genau auf-gefunden werden konnte; es blieben immer mehr oder minder grosse Abweichungen von der gesuchten Werthgrösse des Volumens bei den einzelnen Messungen übrig, die wiederum ganz regellos nach einander auftraten. Bei dieser Sachlage ist es doch einleuchtend, dass wir vor Allem nachforschen müssen, ob es nicht möglich wäre, eine gewisse Ordnung in diese Zahlenreihen hineinzubringen. Wie wir bereits sahen, konnte hier sehr leicht eine Ordnung hergestellt werden, indem zunächst die beiden Grenzwerthgrössen (Minimum und Maximum der gefundenen Volumina) von einer jeden Zahlenreihe aufgesucht wurden, um dann zwischen diese beiden alle übrigen Werthgrössen in aufsteigender Reihenfolge einzuschalten, und zwar so, dass neben einer jeden einzelnen Volumens-Grösse zugleich auch die Anzahl der Vertretung (Häufigkeit der Einzelfälle) aufgezeichnet wurde. Bei dieser Einordnung der Zahlenreihen konnten die einzelnen Abweichungen, d. h. die Fehler bei den Messungen, ganz deutlich und vereinfacht zur Anschauung gebracht werden. Es ist gelungen, — wie dies aus den Tabellen auf S. 279—284 a. a. O. ersichtlich ist, — nicht nur die Fehlergrenzen bei den vier verschiedenen Verfahren der volumetrischen Capacitäts-Bestimmung, sondern auch zugleich diejenigen Fehler ganz genau nachzuweisen, welche einerseits am häufigsten, andererseits weniger häufig, oder sehr selten, oder auch gar nicht bei diesen Versuchen vorkommen. — Bevor wir in der Untersuchung dieser Zahlenreihen weitergehen, wollen wir doch fragen: worin bestand hier der logische Process? — Er bestand dem Wesen nach in einer Erleichterung des Verständnisses so gestalteter Zahlenreihen, und diese Erleichterung verdanken wir einer principiellen Vereinheitlichung, d. h. Vereinfachung der Gesichtspunkte, von welchen wir hier bei der Betrachtung der kraniometrischen Zahlenreihen ausgehen müssen. Wir wissen nun ein für allemal, dass wir für sämmtliche kraniometrische Zahlenreihen vor Allem die Schwankungsbreite der Abweichungen, d. h. der Variationen bestimmen müssen, um dann innerhalb der geordneten Variations-Reihen die Vertheilung der Einzelfälle, d. h. die Häufigkeit der Vertretung der einzelnen gefundenen Werthgrössen bestimmen zu können. — Diese principielle Directive der Forschung bildet aber gradezu eine „conditio sine qua non“ bei einer jeden wissenschaftlichen

Behandlung von kraniometrischen Zahlenreihen. Es muss dieser kategorische Imperativ doch einleuchtend sein. — Nun haben wir eine passende Gelegenheit, zu fragen: hat man diesen Bedingungen bei der wissenschaftlichen Forschung der kraniometrischen Zahlenreihen im Allgemeinen bisher überhaupt oder consequent Genüge geleistet? Gewiss nicht. — Nun muss auch das ganz klar sein, dass bei der Vernachlässigung dieser Vorbedingungen auch die weitere wissenschaftliche Behandlung der kraniometrischen Zahlenreihen mit groben Fehlern behaftet sein musste, und somit zu ganz illusorischen Speculationen führte. Wer nicht einmal die Schwankungsbreite und die ordnungsmässige Vertheilung der einzelnen Werthgrössen innerhalb der Variations-Reihen seiner kraniometrischen Zahlen kennt, was könnte der aus diesen Zahlen überhaupt herauslesen, das zu einem soliden Wissen geeignet wäre?

Wollen wir hier die so eben erwähnte principielle Vereinheitlichung, d. h. die logische Vereinfachung behufs der Erkenntniss dieser Zahlenreihen, sozusagen handgreiflich demonstriren. — 1. Wir bekamen 8 — aus je 100 Einzelzahlen bestehende — Reihen zum Studium. Die erste Vereinfachung bestand darin, dass wir, anstatt unser Gedächtniss mit den kunterbunt aufeinander folgenden einzelnen Zahlen — überdies umsonst — zu belästigen, uns von einer jeden einzelnen (aus 100 Ziffern bestehenden) Zahlenreihe nur zwei Zahlengrössen, die beiden Grenzwerthgrössen (Minimum, Maximum) merkten, welche Maassregel doch als eine grosse Erleichterung erachtet werden muss. — Die principielle Bedeutung besteht hier darin, dass, gleichviel wie lang und wie unregelmässig die Beschaffenheit solcher Zahlenreihen sonst auch sein mochte, einfach schon durch die Kenntniss dieser zwei Werthgrössen es möglich wurde, die Schwankungsbreite für alle Zahlenreihen zu bestimmen, und dies ist für ein elementares Verständniss solcher Zahlenreihen geradezu von grosser Wichtigkeit. — Eine weitere Vereinfachung bestand darin, dass wir, anstatt uns bei der Untersuchung fortwährend mit den langen Zahlenreihen abzumühen, — was wegen der räthselhaften Aufeinanderfolge der Einzelzahlen höchst langwierig und langweilig, sowie ausserdem auch noch für das Gedächtniss höchst belastend wäre — solche Zahlreihen zusammenstellten, in welchen nicht die bei den Messungen der Reihe nach aufgefundenen Werthgrössen, sondern die zwischen den beiden Grenzwerthgrössen liegenden nach dem dekadischen System aufgestellt wurden, und bei den einzelnen zugleich die Häufigkeit ihrer Vertretung in Ziffern ausgedrückt wurde. Durch dieses Verfahren konnten die ursprünglich aus je 100 einzelnen Zahlen bestehenden Zahlenreihen wesentlich verkürzt, und folglich auch unvergleichlich viel übersichtlicher gemacht werden. So z. B. konnte die Zahlenreihe von 100 Einzelfällen verkürzt werden wie folgt:

1.	bei	A. I. α	auf =	9	einz.	Werthgr.,	bei	A. I. β	auf =	21	einz.	Werthgr.
2.	„	A. II. α	„ =	4	„	„	„	A. II. β	„ =	22	„	„
3.	„	B. I. α	„ =	12	„	„	„	B. I. β	„ =	21	„	„
4.	„	B. II. α	„ =	9	„	„	„	B. II. β	„ =	27	„	„
		Summe	=	34	Einzelfälle			Summe	=	91	Einzelfälle.	

Wir sind also auf diese Weise einerseits in den Stand gesetzt worden, anstatt immer mit 800 Zahlen, lediglich nur mit 125 Zahlen zu operiren; aber andererseits wurde hierbei auch das erreicht, dass der Ueberblick unvergleichlich erleichtert wurde. Die principielle Bedeutung besteht hier abermals darin, dass dieses Verfahren ganz gleichmässig für alle derartigen Zahlenreihen angewendet werden kann.

Wir können uns aber auch mit diesen an und für sich immerhin bedeutenden Erleichterungen noch nicht definitiv zufrieden geben. Zahlenreihen von 4, 9, 12, 21, 22 und 29 einzelnen Werthgrössen stets genau im Gedächtnisse zu behalten, ist gewiss nicht leicht. Die Empfindung dieser Schwierigkeit genügt schon an und für sich, um unseren stets auf weitere Erleichterungen lauernden Instinct aufzustacheln, und das um so mehr, als unser Bestreben auch bisher mit günstigen Resultaten belohnt wurde. — Bei einiger Ueberlegung müssen wir von selbst darauf kommen, dass hier das Ideal einer Erleichterung (Vereinfachung) nur darin bestehen könnte, eine Möglichkeit zu finden, von einer jeden einzelnen kraniometrischen Zahlenreihe (Variations-Reihe der Maasswerthe) sich nur eine einzige Zahl merken zu müssen, aus der allein sich ein Rückschluss auf die Beschaffenheit der ganzen Variationsreihe ziehen liesse. — Als Ideal ist eine solche theoretische Zahl gewiss nicht unmöglich;

eine andere Frage ist aber, wie weit man einem solchen Ideal praktisch nahe kommen kann. Wenn wir hierüber etwas nachdenken, so werden wir ohne jede besondere Geistes-Anstrengung darauf kommen, dass eine solche Zahl nur diejenige sein könnte, welche im Mittelpunkt der ganzen Zahlenreihe steht welche sowohl nach der einen Richtung (Minimum der Werthgrössen) wie nach der anderen Richtung (Maximum der Werthgrössen) zu einem jeden Zwischengliede eine symmetrische Lage einnimmt. Eine solche Zahl wäre also eine sogenannte centrale Mittelzahl. Wir haben diese Zahl für die kraniometrischen Zahlenreihen als ein Ideal hingestellt. — Wie einfach und leicht dieser logische Process ist, eine um so strengere Consequenz beansprucht eine praktischen Ausführung. Bevor wir also nach dieser Richtung hin an irgend einen Versuch denken, wollen wir uns ein für allemal streng vor Augen halten, dass eine centrale Mittelzahl nur die sein kann, die zu den einzelnen Zwischengliedern nach der einen Richtung (z. B. Maximal-Werthgrösse) ganz in demselben Grössenverhältnisse steht, wie nach der anderen Richtung (Minimal-Werthgrösse) mit einem Worte: es setzt der Begriff einer centralen Mittelzahl die Bedingung einer vollkommen symmetrischen Zusammensetzung der Zahlenreihe strenge voraus. — Nun können wir ganz leicht und ganz bestimmt auf die bereits berührte Frage antworten: ob dieses Ideal einer Erleichterung auch wirklich angenähert, bezw. erreicht werden kann? — Ja, es kann dieses Ideal erreicht werden in dem Augenblicke, wo man es mit solchen vollkommen symmetrisch zusammengesetzten Zahlenreihen zu thun bekommt. — Die nächste Frage muss sich also darum drehen, ob derartige Zahlenreihen überhaupt gedacht werden können, und ob solche auch in der Wirklichkeit darstellbar sind? — Es können in der That unzählige solche Zahlenreihen gedacht und wirklich dargestellt werden. Wir brauchen uns nur an die einfachsten Zahlenreihen unseres dekadischen Systems zu wenden, um bei ihnen centrale Mittelzahlen aufstellen zu können. Ebenso giebt es umgekehrt keine einfache Zahl, zu welcher eine vollkommen symmetrisch angeordnete Zahlenreihe nicht erdacht und nicht construirt werden könnte.

Die grosse Wichtigkeit der Frage, welcher geradezu die Bedeutung eines Wendepunktes in der Auffassung des kraniologischen Problems zugeschrieben werden muss, soll entschuldigen, wenn ich hier, behufs einer überzeugenden Demonstration, etwas weiter auszuholen genöthigt bin.

Construiren wir also zu einer beliebigen Zahl, z. B. 12, — als centraler Mittelzahl, — eine vollkommen symmetrisch angeordnete Zahlenreihe. Der einfachste Fall tritt ein, wenn man von den auf diese Werthgrösse folgenden grösseren Zahleneinheiten ebensoviele nimmt, als von den vor dieser Werthgrösse vorkommenden kleineren Zahleneinheiten. Ich nehme auf beiden Seiten je 11 Zahleneinheiten. Die Zahlenreihe ist dann die folgende:

$$\overbrace{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11}^{\text{11 Zahleneinheiten}}+\overset{\text{c M}}{\mathbf{12}}+$$
$$\overbrace{13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23}^{\text{11 Zahleneinheiten}}$$

Dass hier 12 eine wahre centrale Mittelzahl (c M) darstellt, ergiebt sich daraus, das sämmtliche Zahleneinheiten links und rechts ganz symmetrisch ihr angereiht sind; dies kann am deutlichsten dadurch veranschaulicht werden, dass man die Differenzen zwischen der centralen Mittelzahl und den links- und rechtsseitigen Zahleneinheiten bestimmt. Je nachdem eine Zahleneinheit kleiner oder grösser ist, als die Werthgrösse der centralen Mittelzahl, werden die Differenzen mit dem Minus oder Pluszeichen angemerkt.

											cM
Differenzen:	—11	—10	—9	—8	—7	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0
Zahlen-einheiten:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	**12**

Differenzen:	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10	+11
Zahleneinheiten:	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

Bei dieser vollkommen symmetrischen Anordnung muss auch die Summe der Differenzen der linksseitigen Glieder gleich derjenigen der rechtsseitigen Glieder sein:

$$S(-\delta) = 11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 66$$
$$S(+\delta) = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11 = 66$$

Es ist doch einleuchtend, dass, wenn irgend einer Zahl die wahre Bedeutung einer centralen Mittelzahl zugeschrieben werden kann, es dann genügt, allein ihre Werthgrösse zu kennen, um zugleich auch die ganze Zahlenreihe construiren zu können; denn man braucht nur nach links und rechts immer dieselbe Anzahl der aufeinanderfolgenden Werthgrössen zu nehmen, um die Zahlenreihe selbst aufstellen zu können, und zwar in einer ganz beliebigen Ausdehnung. (Bei einer geringeren oder bedeutenderen Ausdehnung bleibt ja die vollkommen symmetrische Anordnung der Glieder ganz intact, und dies ist die Hauptsache.)

Nun wollen wir die Aufgabe in umgekehrter Richtung lösen. Es sei die obige Zahlenreihe allein gegeben, und es soll zu dieser die centrale Mittelzahl gesucht werden.

Das allbekannte Verfahren besteht darin, dass man die Summe der Werthgrössen mit der Anzahl der Glieder dividirt; der gefundene Quotient ist die arithmetische Mittelzahl $\left(\frac{S}{N} = M\right)$; z. B.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 21 + 23 = \frac{276}{23} = 12.$$

Wie wir also sehen, ist die arithmetische Mittelzahl (M) bei vollkommen symmetrischer Anordnung einer Zahlenreihe zugleich auch eine centrale Mittelzahl (c M). Aus dem Begriffe der symmetrischen Zusammensetzung einer solchen einfachen (continuirlichen) Zahlenreihe folgt, dass man zur Berechnung der arithmetischen Mittelzahl, (die zugleich auch eine centrale Mittelzahl ist) gar nicht der ganzen Summe benöthigt; es genügt, wenn man je zwei symmetrisch liegende Werthgrössen addirt, und ihre Summe mit 2 dividirt: $\frac{1 + 23}{2} = 12$, oder $\frac{2 + 22}{2} = 12$, $\frac{3 + 21}{2} = 12$ u. s. w. — Der Quotient muss immer derselbe sein, weil bei einer jeden derartigen Berechnung das Grössenverhältniss der beiden Zahlen zu einander immer dasselbe bleibt.

Wenn wir also das einfache, aber streng logische Postulat ein für allemal uns vor Augen halten, dass nehmlich eine möglichst grosse Vereinfachung von gegebenen Zahlenreihen nur dann erreicht werden kann, d. h. die Kenntniss sämmtlicher einzelner Werthgrössen nur dann durch die Kenntniss einer einzigen Werthgrösse (centraler Mittelzahl) vollkommen substituirt werden kann, wenn die Zahlenreihe eine vollkommen symmetrische Zusammensetzung aufweist, — so muss auch das ein für allemal klar sein, dass, wenn wir einen solchen Versuch bei den kraniometrischen Zahlenreihen anstellen wollen, wir zuvörderst dieselben auf ihre Zusammensetzung prüfen müssen.

Jetzt erst können wir die Frage nach der Bedeutung einer arithmetischen Mittelzahl bei den kraniometrischen Zahlenreihen ohne jede Voreingenommenheit behandeln; — denn uns wird hier nichts mehr stören können; nachdem wir alle jene Speculationen, die bisher in der Kraniologie hinsichtlich dieser Frage zu Tage getreten sind, als bedauernswerthe Fictionen erklären können. Anstatt zu, nur bei oberflächlichster Denkart geistreich erscheinenden — Spitzfindigkeiten unsere Zuflucht zu nehmen, um die Mängel des reellen Wissens bemänteln zu können, werden wir mit eiserner Consequenz immer darauf bedacht sein, dass die berechnete arithmetische Mittelzahl wirklich auch den Bedingungen entspricht, damit wir berechtigt sein können, ihr die Bedeutung zuzuschreiben, welche bei einer wissenschaftlichen Behandlung kraniometrischer Zahlenreihen gewünscht werden muss.

Die arithmetische Mittelzahl, an und für sich, kann einzig und allein unter der strengen Bedingung zur näheren Kenntniss der Beschaffenheit irgend einer Zahlenreihe beitragen, dass sie zugleich auch eine centrale Mittelzahl darstellt; dieses letztere ist aber wiederum von der Bedingung abhängig, dass die Zahlenreihe selbst eine vollkommen symmetrische Zusammensetzung aufweise. — Trifft diese Vorbedingung nicht zu, dann nützt Alles nichts. — In diesem Falle müssen sämmtliche Speculationen, aus der arithmetischen Mittelzahl hinsichtlich der Zahlenreihe irgendwelche sichere Rückschlüsse ziehen zu wollen, zu Illusionen führen. — Man soll sich ja nichts darauf einbilden, dass die arithmetische Mittelzahl ein ächt wissenschaftliches, d. h. der Mathematik entlehntes Hülfsmittel sei, dessen man sich behufs einer strenger wissenschaftlichen Beweisführung bedienen kann; diese scheinbare Argumentation fällt in sich zusammen, weil es sich nicht hierum, sondern einzig allein darum handelt: ob die Anwendung der arithmetischen Mittelzahl dem speciellen Zwecke auch entspricht. — Wie bei Zahlenreihen überhaupt, so kann und darf auch bei kraniometrischen Zahlenreihen dieselbe nur behufs einer Analyse der betreffenden Zahlenreihe angewendet werden; die Frage, ob bei dieser Analyse zugleich auch der kraniometrische Typus näher erkannt werden kann, gehört auf eine ganz andere Seite der Erwägungen. — Sobald man diese, in der Natur der Sache begründete Logik verlässt, muss man dem Kreise der falschen und widersinnigen Speculationen verfallen, wie dies leider bisher in der Kraniologie der Fall war. Man benutzte nehmlich die arithmetische Mittelzahl bisher schnurstracks zur Feststellung eines Typus, ohne sich um die nähere Beschaffenheit der betreffenden kraniometrischen Zahlenreihen selbst zu bekümmern; in allen Fällen, wo die arithmetische Mittelzahl den Erwartungen nicht entsprach, nahm man sofort zu einer wahrhaft verkehrten Logik seine Zuflucht. — Denn anstatt die betreffenden Zahlenreihen selbst zuerst sich auch nur ein einziges Mal aufmerksamer anzusehen und darüber etwas nachzudenken, verschmähte man vornehm thuend diese „gewöhnliche“ Geistesarbeit, indem man sofort das ganze Räthsel, wie mit einem Zauberschlage, einfach dadurch zu lösen vermeinte, dass man die stummen Schädel einer Blutmischung anklagte. Dieses Machtwort war das sog. Columbus-Ei, mit welchem man, — wenigstens für den ersten Augenblick —, jeden Zweifel verscheuchen konnte. Später hat man, ausser der Blutmischung, die Schädel auch noch einer sog. Penetration verdächtigt. Alle diese

Spitzfindigkeiten mussten in den Augen des laienhaften Publikums für geistreich gelten, da man ja staunen musste, wie es dem Scharfblicke eines Forschers allemal gelingen könnte, die geheimen Wahrzeichen einer Blutmischung oder sogar einer Penetration an den knöchernen Schädeln zu bemerken. — Daran, dass, ohne jede weitere Daten, kein Sterblicher im Stande sei, an den Schädelformen selbst die wahre Ursache eines Nichtgelingens der Typus-Bestimmung zu erkennen, dachte freilich Niemand; daher konnte man so wohlfeil geistreich thun. — Die Schlüpfrigkeit dieser Geistesrichtung tritt aber sofort hervor, wenn man überhaupt nur etwas strenger zu denken versucht. Es muss ja doch für Jedermann einleuchtend sein, dass wenigstens die Möglichkeit eines Nichtgelingens der Typusbestimmung eine verschiedene sein kann, und dass somit die Ursache eines Nichtgelingens der Typus-Bestimmung unter Anderem auch in der Verfehltheit der Typus-Bestimmung selbst liegen kann. — Man hat bisher in der Kraniologie eher an alles Andere gedacht, nur nicht an diese, gewissermaassen auf der Hand liegende Möglichkeit.

Da wir nun wissen, dass aus der Werthgrösse einer arithmetischen Mittelzahl nur unter der Bedingung richtige Schlüsse auf die Beschaffenheit der Zahlenreihe gezogen werden können, wenn die arithmetische Mittelzahl zugleich eine centrale Mittelzahl darstellt, und das hierfür wiederum eine symmetrische Zusammenstellung der Zahlreihe Vorbedingung ist, so liefert uns dieses eine Moment schon allein einen sicheren Leitfaden zu einer wissenschaftlichen Analyse jeglicher Zahlenreihen. Bevor wir also in der Untersuchung der vier Variations-Reihen der Capacitäts-Bestimmung weitergehen, wollen wir zuerst über diese Frage eine endgültige Entscheidung treffen. — Sehen wir uns die Variations-Reihen auf S. 279—283 und S. 373 a. a. O. etwas näher an, so bemerken wir vor Allem den wichtigen Unterschied, dass, während bei der einfachen Zahlenreihe des dekadischen Systems eine jede einzelne Werthgrösse nur ein einziges Mal vorkommt, bei unsern Zahlenreihen der Schädelcapacitäts-Bestimmung die einzelnen Werthgrössen in sehr verschiedener Anzahl der Einzelfälle vertreten sind, wodurch hier die Frage der arithmetrischen Mittelzahl eine gewisse Complication erfährt. — Stellen wir also die Frage: wie verhält sich die centrale Mittelzahl bei Zahlenreihen, in denen die einzelnen Werthgrössen in verschiedener Anzahl der Einzelfälle, d. h. in verschiedener Häufigkeit vertreten sind? — Bei einigem Nachdenken werden wir sofort herausfinden, dass das Wesen einer centralen Werthzahl hierdurch nicht im Mindesten alterirt werden kann; ein centrale Mittelzahl setzt auch hier eine symmetrische Zusammensetzung der Zahlenreihe voraus. Sind also Zahlenreihen, bei welchen die einzelnen Werthgrössen in verschiedener Häufigkeit der Einzelfälle vertreten sind, zugleich symmetrisch zusammengesetzt, nun dann muss die arithmetrische Mittelzahl auch bei ihnen eine centrale Mittelzahl darstellen, gerade so, wie bei den ganz einfachen Zahlenreihen, wo eine jede einzelne Werthgrösse immer nur ein einziges Mal vertreten ist. — Wie wir also sehen, liegt das entscheidende Moment immer nur darin: wie die Zahlenreihe beschaffen ist. — Dass vollkommen symmetrisch zusammengesetzte Zahlenreihen auch dann möglich sind, wenn die einzelnen Werthgrössen in verschiedener Häufigkeit der Einzelfälle vertreten sind, braucht also nicht erst bewiesen zu werden. Ich stelle eine solche im Folgenden, und zwar aus der obigen einfachen symmetrischen Zahlenreihe, zusammen (S. 379).

Vergleichen wir diese Zahlenreihe mit derjenigen auf S. 373, so bemerken wir, dass bei beiden die einzelnen Glieder, ihre Anzahl, und somit auch ihre Schwankungsbreite dieselbe ist, Ob = 23; dass bei beiden die arithmetische Mittelzahl M = 12 zugleich eine centrale Mittelzahl ist, c M = 12; dass die Zusammensetzung bei beiden eine vollkommen symmetrische ist, wie dies aus der Anordnung der links- und rechtsseitigen Differenzen ersichtlich ist, dass endlich nur in Bezug auf die Häufigkeit (Vertretung) der einzelnen Glieder (einzelnen Werthgrössen) eine Verschiedenheit zwischen beiden Zahlenreihen obwaltet.

Ich habe schon weiter oben bewiesen, dass wenn es sich um symmetrische Zahlenreihen handelt, man die centrale Mittel-

Symmetrisch zusammengesetzte Zahlenreihe, bei verschiedener Häufigkeit der einzelnen Werthgrössen.

Einzelne Werthgröss.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Glieder d. i. versch. Werthgrössen = 23
Häufigkeit derselben	1	1	1	10	10	10	100	300	400	410	419	420	Schwankgsbr.: Ob = 1 — 23 = 23 Einh.
Differenzen von M = 12	— 11	— 10	— 9	— 8	— 7	— 6	— 5	— 4	— 3	— 2	— 1	0	Anzahl der Einzelfälle: N = 3744.
Summe der Einzelfälle der Werthgrössen	1 × 1 = 1	2 × 1 = 2	3 × 1 = 3	4 × 10 = 40	5 × 10 = 50	6 × 10 = 60	7 × 100 = 700	8 × 300 = 2400	9 × 400 = 3600	10 × 410 = 4100	11 × 419 = 4609	12 × 420 = 5040	Summe sämmtlich. Werthgrössen: S = 44928
Summe der Einzelfälle d. Differenz.	— 11 × 1 = — 1	— 10 × 1 = — 10	— 9 × 1 = — 9	— 8 × 10 + — 80	— 7 × 10 = — 70	— 6 × 10 = — 60	— 5 × 100 = — 500	— 4 × 300 = — 1200	— 3 × 400 = — 1200	— 2 × 410 = — 820	— 1 × 419 = — 419	0 × 420 = 0	S. d. — Diff. S — δ = 4379 S. d. + Diff. S + δ = 4379 Sa. sämmtl. Diff. = 8758

Einzelne Werthgröss.	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Glieder (einzelne versch. Werthgrössen) = 23
Häufigkeit derselben	419	410	400	300	100	10	10	10	1	1	1	Schwankungsbreite: Ob = 1 — 23 = 23 Einheiten.
Differenzen von M = 12	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	Anzahl der Einzelfälle: N = 3744
Summe der Einzelfälle der Werthgrössen	13 × 419 = 5447	14 × 410 + 5470	15 × 400 + 6000	16 × 300 = 4800	17 × 100 = 1700	18 × 10 = 180	19 × 10 = 190	20 × 10 = 200	21 × 1 = 21	22 × 1 = 22	23 × 1 = 23	Summe sämmtlicher Werthgrössen: S = 44928.
Summe der Einzelfälle d. Differenz.	+ 1 × 419 = + 419	+ 2 × 410 = + 820	+ 3 × 400 = + 1200	+ 4 × 300 = + 1200	+ 5 × 100 = + 500	+ 6 × 10 = + 60	+ 7 × 10 = + 70	+ 8 × 10 = + 80	+ 9 × 1 = + 9	+ 10 × 1 = + 10	+ 11 × 1 = + 11	Summe d. — Diff. Sδ = 4379 Sa. d. + Diff. S + δ = 4379 Sa. sämmtl. Diff. SD = 8758

zahl (c M) einfach schon dadurch bestimmen kann, dass man die Summe der beiden Grenzwerthgrössen (Glieder) durch die Zahl 2 dividirt: $\mathrm{c\,M} = \frac{1+22}{2} = 12$, dieser Quotient muss in diesem Falle zugleich so gross sein, wie die arithmetische Mittelzahl: $\frac{S}{N} = \frac{44928}{3744} = 12$. — Ich pflege deshalb bei den kraniometrischen Reihen zuvor die centrale Mittelzahl (c M) zu bestimmen, um dann den Unterschied von der arithm. Mittelzahl $\left(M = \frac{S}{N}\right)$ berechnen zu können. — Der etwaige Unterschied schon allein überzeugt uns davon, dass wir es bei den kraniometrischen Zahlenreihen mit keinen symmetrisch zusammengesetzten Zahlenreihen zu thun haben. — Versuchen wir nun die letzteren Reihen ebenso zusammenzustellen, wie ich dies bei der so eben mitgetheilten Zahlenreihe gethan habe (S. 381 u. folg.).

Wir können demnach die Charakteristik der vier Zahlenreihen in Bezug auf die Bedeutung der arithmetischen Mittelzahl in Folgendem zusammenfassen:

a. Die arithmetische Mittelzahl (M) entspricht bei keiner einzigen Zahlenreihe vollkommen der centralen Mittelzahl (cM), wenn auch der Unterschied im Allgemeinen kein grosser und in einem Falle (bei III. α) ein sehr geringer ist.

	cM	*M*	
Bei Iα	1270	1270,30	Die Differenz zwischen *cM* und *M* schwankt bei den vier Reihen zwischen 0,4 (IIIα) und 0,78 (IIα).
„ IIα	1271	1270,22	
„ IIIα	1285	1285,04	
„ IVα	1286	1286,36	

b. Die Werthgrösse der arithmetischen Mittelzahl kommt in keiner einzigen Zahlenreihe thatsächlich vor, hingegen ist die centrale Mittelzahl thatsächlich vertreten bei Iα (1270) und IV α (1286).

c. Die arithmetische Mittelzahl bezw. diejenige Werthgrösse, welche in der Zahlenreihe ihr am nächsten kommt, weist nur in zwei Fällen die verhältnissmässig grösste Häufigkeit auf;

Die Zahlenreihen (Variations-Reihen) der Capacitäts-Bestimmung des Ranke'schen Bronzeschädels (1258,8 ccm).

A. Füllmaterial: Glasperlen von 5—6 mm Durchmesser.

Iα. 100 Capacitäts-Bestimmungen, Volumen des Füllmateriales nachträglich bestimmt.

Einzelne Werthgrössen in ccm	1262	1264	1266	1268	1270	1272	1274	1276	1278	$Ob = 1262 - 1278 = 17$ Einheiten
Häufigkeit	1	1	9	22	24	28	12	2	1	$N = 100$
Differenzen von M = 1270,30 ccm	— 8,30	— 6,30	— 4,30	— 2,30	— 0,30	+ 1,70	+ 3,70	+ 5,70	+ 7,70	
Summe der Einzelfälle der Werthgrössen	1262 × 1 = 1262	1264 × 1 = 1264	1266 × 9 = 11 394	1268 × 22 = 27 896	1270 × 24 = 30 480	1272 × 28 = 35 616	1274 × 12 = 15 288	1276 × 2 = 2552	1278 × 1 = 1278	$S = 127030$

Centrale Mittelzahl: $cM = \frac{1262 + 1278}{2} = 1270.$

Arithm. Mittelzahl: $M = \frac{S}{N} = \frac{127030}{100} = 1270{,}30.$

Summe der Einzelfälle der Differenzen	— 8,30 × 1 = — 8,30	— 6,30 × 1 = — 6,30	— 4,30 × 9 = — 38,70	— 2,30 × 22 = — 50,60	— 0,30 × 24 = — 7,20	+ 1,70 × 28 = + 47,60	+ 3,70 × 12 = + 44,40	+ 5,70 × 2 = + 11,40	+ 7,70 × 1 = + 7,70	$S - \delta = 111{,}10$ $S + \delta = 111{,}10$ $SD = 222{,}20$

II. α. 100 Capacitäts-Bestimmungen, Volumen bei der Füllung abgelesen.

Einzelne Werthgrössen in ccm	1268	1270	1272	1274	$Ob = 1268 - 1274 = 7$ Einh.
Häufigkeit	37	39	19	5	$N = 100$
Differenzen von $M = 1270{,}22$ ccm	$-2{,}22$	$-0{,}22$	$+1{,}78$	$+3{,}78$	
Summe der Einzelfälle der Werthgrössen	$1268 \times 37 = 46\,916$	$1270 \times 39 = 49\,530$	$1272 \times 15 = 24\,206$	$1274 \times 5 = 6370$	$S = 127\,022$; $cM = \frac{1268 + 1274}{2} = 1271$; $M = \frac{S}{N} = \frac{127\,022}{100} = 1270{,}22$
Summe der Einzelfälle der Differenzen	$-2{,}22 \times 37 = -82{,}14$	$-0{,}22 \times 39 = -8{,}58$	$+1{,}78 \times 15 = +33{,}82$	$+3{,}78 \times 5 = +18{,}90$	$S-\delta = 90{,}72$ $S+\delta = 52{,}72$ $SD = 143{,}44$

B. Füllmaterial: Erbsen von 5—6 mm Durchmesser.

III. α. 100 Capacitäts-Bestimmungen, Volumen nachträglich bestimmt.

Einzelne Werthgrössen in ccm	1274	1276	1278	1280	1282	1284	1286	1288	1290	1292	1294	1296	$Ob = 1274 - 1296 = 23$ Einh.
Häufigkeit	4	6	9	10	7	13	10	13	11	6	9	2	$N = 100$
Differenzen von $M = 1285{,}04$ ccm	−11,04	−9,04	−7,04	−5,04	−3,04	−1,04	+0,96	+2,96	+4,96	+6,96	+8,96	+10,96	
Summe der Einzelfälle der Werthgrössen	1274 × 4 = 5096	1276 × 6 = 7656	1278 × 9 = 11502	1280 × 10 = 12800	1282 × 7 = 8974	1284 × 13 = 16692	1286 × 10 = 12860	1288 × 13 = 16744	1290 × 11 = 14190	1292 × 6 = 7752	1294 × 9 = 11646	1296 × 2 = 2592	$S = 128504$

Centrale Mittelzahl: $cM = \frac{1274 + 1296}{2} = 1285.$

Arithm. Mittelzahl: $M = \frac{S}{N} = \frac{128\,504}{100} = 1285{,}04.$

Summe der Einzelfälle der Differenzen	−11,04 × 4 = −44,16	−9,04 × 6 = −54,24	−7,04 × 9 = −63,36	−5,04 × 10 = −50,40	−3,04 × 7 = −21,28	−1,04 × 13 = −13,52	+0,96 × 10 = +9,60	+2,96 × 13 = +38,48	+4,96 × 11 = +54,56	+6,96 × 6 = +41,76	+8,96 × 9 = +80,64	+10,96 × 2 = +21,92	$S - \delta = 246{,}96$ $S + \delta = 246{,}96$ $SD = 493{,}92$

IV. α. 100 Capacitäts-Bestimmungen, Volumen bei der Füllung abgelesen.

Einzelne Werthgrössen in ccm	1278	1280	1282	1284	1286	1288	1290	1292	1294	$Ob=1278-1294$ $=17$ Einh.
Häufigkeit	1	3	10	18	26	21	16	4	1	$N=100$
Differenzen von $M=1286{,}36$ ccm	—8,36	—6,36	—4,36	—2,36	—0,36	+1,64	+3,64	+5,64	+7,64	
Summe der Einzelfälle der Werthgrössen	1278×1 =1278	1280×3 =3840	1282×10 =12 820	1284×18 =23 112	1286×26 =334 36	1288×21 =27 048	1290×16 =20 640	1292×4 =5168	1294×1 =1294	$S=128\,636$ $cM=\frac{1278+1294}{2}=1286$ $M=\frac{S}{N}=\frac{128\,636}{100}=1286{,}36$
Summe der Einzelfälle der Differenzen	—8,36 ×1 =—8,36	—6,36 ×3 =—19,08	—4,36 ×10 =—43,60	—2,36 ×18 =—42,48	—0,36 ×26 =—9,36	+1,64 ×21 =+34,44	+3,64 ×16 =+58,24	+5,64 ×4 =+22,56	+7,64 ×1 =+7,64	$S-\delta=122{,}88$ $S+\delta=122{,}88$ $SD=245{,}76$

bei IIα = 39 pCt. der Einzelfälle, (hier weicht aber dieselbe von der centralen Mittelzahl am meisten ab = 0,78, und die Anzahl der Einzelfälle nimmt gerade in dieser Richtung so plötzlich bedeutend ab), und bei IVα = 26 pCt. der Einzelfälle.

d. Die asymmetrische Zusammensetzung der Zahlenreihen tritt bei allen vier Zahlenreihen deutlich hervor, wenn wir die Werthgrössen der Differenzen von je zwei in entgegengesetzter Richtung, aber correspondirend liegenden Gliedern untereinander vergleichen.

Bei Iα

— 8,30	und	+ 7,70
— 6,30	„	+ 11,40
— 38,70	„	+ 44,40
— 50,60	„	+ 47,60
— 7,20	„	—

$S - \delta = 111{,}10$; $S + \delta = 111{,}10$

Bei IIα

— 82,14	und	+ 18,90
— 8,58	„	+ 33,82

$S - \delta = 90{,}72$; $S + \delta = 52{,}72$

Bei IIIα

— 44,16	und	+ 21,92
— 54,24	„	+ 80,64
— 63,36	„	+ 41,76
— 50,40	„	+ 54,56
— 21,28	„	+ 38,48
— 13,52	„	+ 9,60

$S - \delta = 246{,}96$; $S + \delta = 246{,}96$

Bei IVα

— 8,36	und	+ 7,64
— 19,08	„	+ 22,56
— 43,60	„	+ 58,24
— 42,48	„	+ 34,44
— 9,36	„	—

$S - \delta = 122{,}88$; $S + \delta = 122{,}88$

In Anbetracht dessen, dass die Bedeutung (Werthigkeit) der arithmetischen Mittelzahl einzig und allein von der Zusammensetzung der Zahlenreihe abhängt, namentlich aber, dass sie nur bei einer vollkommen symmetrischen Anordnung der einzelnen Werthgrössen der Glieder die Bedeutung einer wahren centralen Mittelzahl erreicht, ist die Vergleichung der Differenzen zwischen correspondirenden Gliedern behufs eines wissenschaftlichen Studiums von kraniometrischen Zahlenreihen von der grössten Wichtigkeit. Dies ist um so nöthiger, weil, wie eben diese vier Zahlenreihen so handgreiflich beweisen, eine Unterlassung der genaueren Untersuchung der Zusammensetzung zu unheilvollen Illusionen führen kann. Wenn z. B. jemand, von dem an und für sich ganz richtigen Standpunkt ausgehend: dass eine symmetrische Zusammensetzung unbedingt die gleiche Summe der links- und rechtsständigen Differenzen ($-\delta$, $+\delta$) voraussetzt, nur das Endresultat der beiderlei Differenzen in Betracht ziehen würde, ohne sich um die thatsächliche Vertheilung der Differenzen zu bekümmern, so müsste er aus der Gleichheit: $S-\delta=S+\delta$ auf eine symmetrische Anordnung der Glieder schliessen, was aber wie die drei Zahlenreihen Iα, IIIα, IVα beweisen, gelegentlich ein vollkommener Irrthum sein könnte. Es ist einleuchtend, dass der Schluss: eine symmetrische Zusammensetzung der Zahlenreihe setzt eine Gleichheit der links- und rechtsseitigen Differenzen voraus, — in umgekehrter Richtung nicht statthaft ist; denn auch bei gleichem Endresultate können die Einzelheiten von höchst verschiedener Beschaffenheit sein. Das Endresultat gestattet an und für sich keinen sicheren Einblick in die Einzelmomente, welche das Endresultat herbeigeführt haben. Ganz verschiedene Einzelmomente können zufällig zu gleichen Endresultaten führen. Bei wirklich symmetrisch zusammengesetzten Zahlenreihen ist nicht nur $S-\delta=S+\delta$, sondern zugleich auch eine jede einzelne $-\delta$ ist gleich der correspondirenden $+\delta$, wie dies bei der behufs der Demonstration bereits mitgetheilten Zahlenreihe der Fall ist.

Die Gleichheit der einzelnen $-\delta$ und $+\delta$ bei der symmetrisch zusammengesetzten Zahlenreihe auf S. 379

$$\left\{\begin{array}{rcr}
-\ 11 & = & +\ 11 \\
-\ 10 & = & +\ 10 \\
-\ 9 & = & +\ 9 \\
-\ 80 & = & +\ 80 \\
-\ 70 & = & +\ 70 \\
-\ 60 & = & +\ 60 \\
-\ 500 & = & +\ 500 \\
-\ 1200 & = & +\ 1200 \\
-\ 1200 & = & +\ 1200 \\
-\ 820 & = & +\ 820 \\
-\ 419 & = & +\ 419 \\
\hline
S-\delta=4379 & = & S+\delta=4379
\end{array}\right.$$

Fassen wir die Ergebnisse aus den bisherigen Erörterungen über die kraniometrichen Zahlreihen zusammen, so müssen wir für die Ermöglichung eines wirklichen Fortschrittes in der kraniometrischen Anthropologie geradezu zu einem Schlusse gelangen, welcher einen Wendepunkt in der kraniologischen Forschung bedeutet.

Wir haben bisher, ohne der Zusammensetzung der kraniometrischen Zahlenreihen irgend welche Aufmerksamkeit zu widmen, immer schnurstracks die arithmetische Mittelzahl berechnet, um dann dieselbe zu möglichst vielverheissenden Speculationen bezüglich einer Lösung der jeweiligen Probleme zu benutzen; daraus mussten aber, wie dies die in der kraniologischen Literatur wimmelnden Widersprüche beweisen, die grössten Widersinnigkeiten entstehen, deren Ausgleichung ein völlig nutzloses Unternehmen wäre. — Wir haben hier nicht nur die Nichtigkeit: aus der arithmetischen Mittelzahl etwas beweisen zu wollen, klar dargethan, sondern zugleich auch den Nachweis geliefert: was man und wie man es beginnen soll, um überhaupt aus den kraniometrischen Zahlenreihen einen brauchbaren Nutzen zu ziehen. Wir sind genöthigt, den Lehrsatz wie einen kategorischen Imperativ aufzustellen: dass wir bei einer wissenschaftlichen Behandlung von kraniometrischen Zahlenreihen die grösste Aufmerksamkeit eben der Erforschung der Zusammensetzung jedweder einzelnen kraniometrischen Zahlenreihe widmen müssen, denn ohne die Erforschung dieser müssen wir unbedingt auf vollkommen illusoriche Speculationen verfallen. — Wie klar und einleuchtend dies einem jeden bei einiger Vorurtheilslosigkeit auch sein muss, so ausserordentlich schwierig ist es, bei unserer althergebrachten, eingefleischten, flüchtigen Denkweise in der Kraniologie dies wirklich einzusehen und auch darnach zu handeln.

IV. Das allgemeine Princip einer Gesetzmässigkeit bei zufälligen Zahlenreihen und ihre Eintheilung in die drei Variations-Gruppen.

Ich habe weiter oben als Ideal der Bestrebungen nach möglichster Vereinfachung beim Studium von Zahlenreihen den Fall aufgestellt: dass es gelingen müsste, ausser den beiden Grenzwerthgrössen nur noch eine einzige, — nehmlich die centrale Mittelzahl kennen zu lernen, um aus ihnen für die ganze Zahlenreihe wissenschaftlich solide Rückschlüsse ziehen zu können; ich habe dieses Ideal für erreichbar hingestellt bei solchen Zahlenreihen, welche vollkommen symmetrisch zusammengesetzt sind, und bei welchen eine jede einzelne Werthgrösse (Glied) ohne Ausnahme nur ein einziges Mal vertreten ist. — Wenn ich z. B. weiss, dass die Werthgrösse = 12 eine centrale Mittelzahl darstellt, so kann ich mir hierzu eine beliebige Zahlenreihe construiren (11 + 12 + 13; 10 + 11 + 12 + 13 + 14; 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 u. s. w.); sind ausserdem noch die beiden Grenzwerthe angegeben, so kann auch die specielle Zahlenreihe selbst construirt werden, wie ich dies an den beiden Grenzwerthen 1 und 23 demonstrirt habe.

Bei den kraniometrischen Zahlenreihen ist dieses Ideal einer Vereinfachung ein für allemal unerreichbar. Denn erstens sind sie nicht symmetrisch zusammengesetzt; zweitens, und hierin liegt der zweite wesentliche Unterschied, weisen bei ihnen die einzelnen Werthgrössen (Glieder) eine verschiedene Vertretung auf. Wir wollen schon jetzt vorweg betonen, dass auch im Falle einer vollkommen symmetrischen Zusammensetzung die arithmetische Mittelzahl, (welche zugleich eine centrale Mittelzahl ist), nicht genügen kann, wenn die einzelnen Glieder mehr als ein einziges Mal in der Zahlenreihe vertreten sind. — Ziehen wir die schon mitgetheilte symmetrische Zahlenreihe hierzu behufs einer Beweisführung in Betracht.

(Siehe Seite 389.)

Wiewohl hier $cM\left(\frac{1+23}{2}\right) = 12 = M\left(\frac{S}{N} = \frac{44928}{3744}\right) = 12$, ist, so kann diese Werthgrössse allein uns doch gar keinen Aufschluss über die sonstigen Eigenschaften dieser Zahlenreihe geben. Nament-

Summe der Werthgrössen	1	2	3	40	50	60	700	2400	3600	4100	4609	5040
Häufigkeit	1	1	1	10	10	10	100	300	400	410	419	420
Einzelne Werthgrössen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	**12**
Differenzen d. einzelnen Werthgr.	—11	—10	—9	—8	—7	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0
Summe der Differenzen	—11	—10	—9	—80	—70	—60	—500	—1200	—1200	—820	—419	0

Summe der Werthgrössen	5447	5740	6000	4800	1700	180	190	200	21	22	23	$S = 44928$
Häufigkeit	419	410	400	300	100	10	10	10	1	1	1	$N = 3744$
Einzelne Werthgrössen	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Ob = 23 Einh.
Differenzen d. einzelnen Werthgr.	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10	+11	$S - \delta = S + \delta$
Summe der Differenzen	+419	+820	+1200	+1200	+500	+60	+70	+80	+9	+10	+11	$SD = 8758$

lich erfahren wir Nichts durch sie über die Vertretung der einzelnen Werthgrössen (Glieder) innerhalb der Zahlenreihe. — Da also bei solchen Zahlenreihen ausser den beiden Grenzwerthgrössen keine solche dritte einzelne Werthgrösse ausfindig gemacht werden kann, die behufs der Charakteristik an und für sich schon genügen würde, müssen wir über eine andere Erleichterung (Vereinfachung) für die Erforschung dieser Zahlenreihen nachdenken. Da wir also einerseits mit einer einzigen Werthgrösse nicht auskommen, andererseits nicht alle Einzel-Werthgrössen im Gedächtniss behalten können, so bleibt kein anderer Ausweg übrig, als wenigstens ein solches allgemein gültiges Princip kennen zu lernen, das für eine jede derartig zusammengesetzte Zahlenreihe gleichmässig angewendet werden kann. —

Nun müssen wir zu unseren kraniometrischen Zahlenreihen zurückkehren, weil dieselben nicht die vollkommen symmetrische Zusammensetzung aufweisen, wie die hier z. B. aufgestellte Zahlenreihe. — Der ausschlaggebende Unterschied besteht hier darin: dass bei ihnen einerseits die Vertretung (Häufigkeit) der Einzel-Werthgrössen höchst verschiedentlich, so zu sagen launenhaft, auftritt, andererseits sie nicht immer continuirliche Zahlenreihen darstellen. (Siehe z. B. die Zahlenreihen der Gewichts-Bestimmung des Füllmateriales auf S. 270—273). — Bei sämmtlichen Zahlenreihen der Gewichts-Bestimmung fehlt die Vertretung einzelner Zwischenglieder; so z. B. bei Iβ sind die Werthgrössen: 1952, 1970; bei IIβ 1970, 1973: bei IIIβ 1116 und bei IVβ 1112, 1113, 1119, 1136 gar nicht vertreten. — Die verschiedene, unregelmässige Vertretung, sowie das gelegentliche Fehlen der Vertretung der einzelnen Werthgrössen drückt diesen Zahlenreihen den charakteristischen Stempel auf. Kein Mensch ist im Stande, ohne Zuhülfenahme eines anderswo erkannten Principes eine Gesetzmässigkeit die den kraniometrischen Zahlenreihen nachzuweisen; man soll nur ein einziges Mal den Versuch z. B. bei den Zahlenreihen I, II, III, IVα und β machen, um sofort einzusehen, dass wir die Zeit umsonst vergeuden müssten, — da hier eine Gesetzmässigkeit nicht ausfindig gemacht werden kann.

Es ist doch klar, dass ihre jeweilige Zusammensetzung nicht von einer einzigen und constanten Ursache herrühren kann; ihre Zusammensetzung kann nur dadurch verständlich gemacht werden, dass wir mehrere und gegenseitig variable Ursachen annehmen. Wir haben es also bei den kraniometrischen Zahlenreihen mit Complicationen der ursächlichen Momente zu thun; dies wird doch ein jeder, der sich mit kraniometrischen Messungen abgiebt, ohne Weiteres einsehen müssen. Befreunden wir uns also auch damit, dass wir die kraniometrischen Zahlenreihen kurzweg als „zufällige“ Zahlreihen erklären. Bei dieser Benennung wollen wir uns nur das vor Augen halten: dass wir hier immer mit mehreren, variablen ursächlichen Momenten zu thun haben, und dass folglich auch eine

Gesetzmässigkeit hier nicht auf die einfache Weise nachgewiesen werden kann, wie bei solchen Zahlenreihen, bei deren Zustandekommen nur eine einzige constante Ursache obwaltet. Den Nachweis einer Gesetzmässigkeit bei zufälligen Naturerscheinungen verdanken wir Gauss. Diese Gesetzmässigkeit besteht aber vollgültig nur unter der Voraussetzung, dass sämmtliche möglichen Einzelfälle bei einer „zufälligen" Naturerscheinung in Betracht gezogen werden. Da nun uns Menschen einmal versagt ist, unsere Untersuchungen auf alle möglichen Einzelfälle einer „zufälligen" Naturerscheinung ausdehnen zu können, so werden wir wohl nie im Stande sein, bei derlei Naturerscheinungen auch eine volle Gesetzmässigkeit wirklich nachweisen zu können. Unsere Rückschlüsse auf eine Gesetzmässigkeit werden also nie die Sicherheit selbst erreichen, sondern nur mehr oder minder grosse Wahrscheinlichkeiten einer Sicherheit. Eine solche absolute Gesetzmässigkeit, wie sie z. B. Kollmann für die Correlationen am Gesichtsschädel sich ausgedacht hat, muss unbedingt als eine Selbsttäuschung erklärt werden.

Da wir also bei unseren Beobachtungs-Reihen „zufälliger" Naturerscheinungen immer darauf bedacht sein müssen, wenigstens eine Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit unserer Rückschlüsse nachweisen zu können, so sind wir auch verpflichtet, stets Rechenschaft davon abzulegen, in wiefern unsere Beobachtungs-Reihen einer Gesetzmässigkeit „zufälliger" Naturerscheinungen entsprechen. — Hierfür müssen die folgenden Hauptmomente der Gauss'schen Gesetzmässigkeit in Erwägung gezogen werden: 1. Die verschiedenen möglichen Einzelfälle bei zufälligen Naturerscheinungen stellen Variationen einer Function dar, welche immer zwischen gewissen, wenn auch uns nicht näher bekannten Grenzen verlaufen ($-l$ = linksseitiger, $+$ = rechtsseitiger Grenzpunkt). — 2. Diese Variation geht von einem Mittelpunkte aus, in welchem die Function ihren Höhepunkt erreicht; in Folge davon ist auch die Anzahl der Einzelfälle der Variation im Mittelpunkte am grössten, und nimmt mit der Abnahme der Function in centrifugaler Richtung nach beiden Seiten stets symmetrisch, aber nicht gleichmässig ab. Anfangs, d. h. in der unmittelbaren Nähe des Mittelpunktes, ist die Abnahme der Function eine verhältnissmässig geringe, und diese Abnahme hängt zunächst von der Werthgrösse der sog. wahrscheinlichen Abweichung (oder von dem in der Mathematik sogenannten wahrscheinlichen Fehler $= r$) ab. — Unter der wahrscheinlichen Abweichung muss jene Werthgrösse der Differenzen (von der arithmetischen Mittelzahl) verstanden werden, die von sämmtlichen übrigen Werthgrössen der Differenzen ebenso oft übertroffen, wie nicht erreicht wird. Zieht man einerseits die Werthgrösse der wahrscheinlichen Abweichung von derjenigen der arithmetischen Mittelzahl ab ($M - r$), und addirt man andererseits dieselbe zur arithmetischen Mittelzahl ($M + r$), so sind diejenigen zwei Grenzpunkte bestimmt, innerhalb welcher die Function verhältnissmässig am wenigsten abnimmt, innerhalb welcher also auch die Anzahl der Einzelfälle der Variation, — hinsichtlich der Anzahl sämmtlicher übrigen Einzelfälle —, stets am allerbedeutendsten ist. Von diesen beiden Grenzpunkten angefangen, nimmt die Function bedeutend ab, bis sie endlich bei den zwei endständigen Grenzpunkten ($- l$ und $+ l$) bis auf Null herabsinkt. (Der Nullpunkt selbst wird aber nur bei $\infty - l$ und $\infty + l$ erreicht.) Dieser Function entsprechend, muss auch die Anzahl der Einzelfälle der Variation, von den beiden Grenzpunkten: ($M - r$) und ($M + r$) angefangen, rascher abnehmen, um gegen die beiden endständigen Grenzen der Variations-Reihe so gering zu werden, dass überhaupt nur einige Einzelfälle auftreten; bei $\infty - l$ und $\infty + l$ hört jedwede Variation auf. — 3. Diese, die volle Gesetzmässigkeit ausdrückende Variations-Reihe stellt demnach eine vollkommen symmetrisch gebaute Reihe der Einzelfälle dar, innerhalb welcher drei Abschnitte, d. h. Gruppen von Einzelfällen der Variation unterschieden werden müssen: a) die links-endständige Gruppe ($- lG$), welche zwischen $- l$ und $(M - r) - 1$ reicht, b) die centrale Gruppe (cG), welche zwischen den beiden bereits erwähnten Grenzpunkten ($M - r$ und $M + r$) sich erstreckt, und c) die rechts-endständige Gruppe ($+ lG$), welche mit $(M + r) + 1$ beginnt und bis $+ l$ reicht. Die Gesetzmässigkeit der Vertheilung der Einzelfälle der Variation zwischen diesen drei Gruppen erhält ihren präcisen Ausdruck durch die Vertheilung der Differenzen der Werthgrössen der Einzelfälle von der arithmetischen Mittelzahl, und zwar wie folgt: Von der totalen Summe sämmtlicher Differenzen (*SD*) entfällt $\frac{1}{4}$ auf die links-endständige Gruppe (— *lG*), $\frac{1}{2}$ auf die centrale Gruppe (*cG*) und das übrige $\frac{1}{4}$ auf die rechts-endständige Gruppe (+ *lG*). — $SD =$ a. $- lG \frac{1}{4} +$ b. $cG \frac{1}{2} +$ c. $+ lG \frac{1}{4}$. — 4. Es ist bei der symmetrischen Zusammensetzung einer die Gesetzmässigkeit vollends zum Ausdrucke bringenden Variations-Reihe selbstverständlich, dass die arithmetische Mittelzahl zugleich auch eine centrale Mittelzahl darstellt ($cM = M$), und dass sämmtliche links- und rechtsseitig correspondirend liegenden Differenzen gleich sind, somit auch die Summe der linksseitigen Differenzen gleich derjenigen der rechtsseitigen Differenzen ($S - \delta = S + \delta$) sein muss.

Nun besitzen wir eine präcise Methode behufs Prüfung jeglicher „zufälliger" Zahlenreihen, da wir hinsichtlich des Nachweises einer Gesetzmässigkeit dieselben immer nur auf die soeben angeführten vier Hauptmomente zu untersuchen brauchen.

Bevor diese Prüfung bei den Variations-Reihen der Capacitäts-Bestimmung vorgenommen werden soll, will ich, zur leichteren Uebersicht des ganzen Verfahrens, die obige, symmetrisch zusammengesetzte Zahlenreihe (S. 389) zum Muster wählen.

Bevor eine Variations-Reihe auf ihre Gesetzmässigkeit geprüft werden kann, müssen vorher die folgenden Elemente bestimmt werden: 1. die Schwankungsbreite (*Ob*); 2. die arithmetische Mittelzahl $\left(M = \frac{S}{N}\right)$; 3. der Oscillations-Exponent (*Oe*), d. i. die arithmetische Mittelzahl der Differenzen $\frac{SD}{N}$; 4. die wahrscheinliche Abweichung $\left(r = 0{,}6745 \times \sqrt{\frac{SD^2}{N-1}}\right)$, um mittelst dieser Werthgrösse die Variations-Reihe in die drei Gruppen: *a.* $- lG$, *b.* cG und *c.* $+ lG$ eintheilen zu können. 5. Die Präcisionszahl der Variations-Reihe, bezw. der arithmetischen Mittelzahl $\left(R = \frac{r}{\sqrt{N}}\right)$.

Um den Gang des Verfahrens bequem überblicken zu können, stelle ich die in Rede stehende Zahlenreihe hier nochmals, und zwar sammt den zu berechnenden Elementen, in der folgenden Tabelle zusammen.

Laufende Nummer	Werthgrössen	Einzelfälle	Summe der Werthgrössen	Differenzen der Werthgrössen von M = 12	Summe der Differenzen	Quadrate der einzelnen Differenzen	Summe der Quadrate der Differenzen	Variationsgruppen
1	1	1	1	— 11	— 11	121	121	
2	2	1	2	— 10	— 10	100	100	
3	3	1	3	— 9	— 9	81	81	
4	4	10	40	— 8	— 80	64	640	
5	5	10	50	— 7	— 70	49	490	a.
6	6	10	60	— 6	— 60	36	360	— 1 G
7	7	100	700	— 5	— 500	25	2500	
8	8	300	2400	— 4	— 1200	16	4800	
9	9	400	3600	— 3	— 1200	9	3600	
10	10	410	4100	— 2	— 820	4	1640	
11	11	419	4609	— 1	— 419	1	419	
12	12	420	5040	0	0	0	0	b.
13	13	419	5447	+ 1	+ 419	1	419	c G
14	14	410	5740	+ 2	+ 820	4	1640	
15	15	400	6000	+ 3	+ 1200	9	3600	
16	16	300	4800	+ 4	+ 1200	16	4800	
17	17	100	1700	+ 5	+ 500	25	2500	
18	18	10	180	+ 6	+ 60	36	360	
19	19	10	190	+ 7	+ 70	49	490	c.
20	20	10	200	+ 8	+ 80	64	640	+ 1 G
21	21	1	21	+ 9	+ 9	81	81	
22	22	1	22	+ 10	+ 10	100	100	
23	23	1	23	+ 11	+ 11	121	121	
$Ob = 23$		N = 3744	S = 44928		S — δ = 4379 S + δ = 4379 S D = 8758		SD = 29502	

Charakteristik der Zahlenreihe.

1. $N = 3744$ Einzelfälle.
2. Ob = zwischen: $(- l)$ 1 und $(+ l)$ 23 = 23 Einheiten.
3. $M = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}} = \frac{44928}{3744} = 12.$
4. $cM = \frac{1 + 23}{2} = 12.$
5. $Oe = \frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{N}} = \frac{8758}{3744} = 2.34.$

6. $r = 0 \cdot 6745 \times \sqrt{\frac{SD^2}{N-1}} = 1 \cdot 90 \left\{ \sqrt{\frac{SD^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{29502}{3743}} = \sqrt{7 \cdot 88} = 2 \cdot 8084 = 2 \cdot 81; 0 \cdot 6745 \times 2 \cdot 81 = 1 \cdot 895345 = 1 \cdot 90 \right\}.$

7. $R = \frac{r}{\sqrt{N}} = \frac{1 \cdot 90}{\sqrt{3744}} = \frac{1 \cdot 90}{61.90} = 0 \cdot 03.$

8. Schwankungs-Breite der centralen Variations-Gruppe:
$M - r = 12 - 1 \cdot 90 = 10 \cdot 10$
$M + r = 12 + 1 \cdot 90 = 13 \cdot 90.$

9. Eintheilung der Zahlenreihe in die drei Variations-Gruppen: Weil in der Zahlenreihe nur ganze Zahlen vorkommen, muss hier $10 \cdot 10$ = für 10 und $13 \cdot 90$ = für 14 genommen werden, somit erstreckt sich:

a — lG:	v. Werthgr. 1 bis incl. 10	= 10 Einheiten od.	= 43,48 pCt.	(v. 23 Einheiten)
b cG:	„ „ 11 „ „ 14	= 4 „ „	= 17,39 „	„ 23 „
c + lG:	„ „ 15 „ „ 23	= 9 „ „	= 39,13 „	„ 23 „

Totale Summe = 23 einz. Werthgr. = 100,00 pCt.

10. Vertheilung der Einzelfälle zwischen den drei Variations-Gruppen:

a — lG:	Summe der Einzelfälle	= 1243 oder	= 33,20 pCt.	(von 3744 Einzelfällen)
b cG:	„ „ „	= 1668 „	= 44,55 pCt.	„ 3744 „
c + lG:	„ „ „	= 833 „	= 22,25 pCt.	„ 3744 „

Totale Summe N = 3744 Einzelf. = 100,00 pCt.

11. Vertheilung der Wiederholungen der einzelnen Werthgrössen zwischen den drei Variations-Gruppen:

a — lG:	Bei 1243 Einzelf.	= 1233 Wiederhol. od.	= 33,14 pCt.	(v. 3721 Wiederhol.)
b cG:	„ 1668 „	= 1664 „ „	= 44,72 „	„ 3721 „
c + lG:	„ 833 „	= 824 „ „	= 22,14 „	„ 3721 „

Summe = 3721 Wiederhol. od. = 100,00 pCt.

12. Vertheilung der Differenzen zwischen den drei Variations-Gruppen:

a — lG:	Summe d. Differenzen	= 3960 oder	= 45,22 pCt.	(von 8758 Differenzen)
b cG:	„ „ „	= 1658 „	= 18,93 „	„ 8758 „
c + lG:	„ „ „	= 3140 „	= 35,85 „	„ 8758 „

Totale Summe SD = 8758 oder = 100,00 pCt.

13. Die Zusammensetzung der Zahlenreihe in Bezug auf die symmetrische Vertheilung der Differenzen:

a. Bei vollkommener Gesetzmässigkeit:	S — δ = S + δ	a. — lG = 25 pCt.
In der Zahlenreihe:	4379 = 4379	„ = 45 · 22 „
	Diff. = 0	Diff. = + 20,22 pCt.

a. Bei vollkommener Gesetzmässigkeit:	b. cG = 50 pCt.	c. + lG = 25 pCt.
In der Zahlenreihe:	„ = 18 · 93 „	„ = 35 · 85 „
	Diff. = — 31 · 07 pCt.	Diff. = + 10 · 85 pCt.

b. Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: Summe der Differenzen in a. — lG (25 pCt.) = c. + lG (25 pCt.).

In der Zahlenreihe: Summe der Differenzen in a. — lG = 45 · 22 pCt. c. + lG = 35 · 85 pCt.

Differenz = — 9 · 37 (c. + lG).

14. Die Schwankungsbreite, innerhalb welcher die centrale Mittelzahl vorkommen muss: $M - R = 11 \cdot 97$

$$M + R = 12 \cdot 03$$
$$Ob = 0 \cdot 07 \text{ Einheiten.}$$

Da in der Zahlenreihe nur ganze Zahlen vorkommen, bleibt auch $0 \cdot 07$ verborgen, daher auch $cM = 12 = M = 12$.

Diese Zahlenreihe ist für ein methodisches Studium kraniometrischer Zahlenreihen höchst lehrreich, da sie uns die Unterschiede von einer die vollkommene Gesetzmässigkeit ausdrückenden Zahlenreihe ganz deutlich demonstrirt. Wir sehen hier nehmlich, dass, wiewohl diese Zahlenreihe dem groben Augenscheine nach eine symmetrische Zusammensetzung ($cM = M$, $S - \delta = S + \delta$) aufweist, dieselbe bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung doch sehr wichtige Asymmetrien verräth: einerseits, da das Verhältniss der Vertheilung der Differenzen zwischen den drei Variations-Gruppen nicht der vollkommenen Gesetzmässigkeit entspricht (bei vollkommener Gesetzmässigkeit: *a.* $- lG =$ 25 pCt., *b.* $cG = 50$ pCt., *c.* $+ lG = 25$ pCt., hier aber ist: *a.* $- lG = 45 \cdot 22$ pCt., *b.* $cG = 18 \cdot 93$ pCt., *c.* $+ lG =$ $35 \cdot 85$ pCt.); andererseits ist die Theilsumme der Differenzen in den beiden endständigen Variations-Gruppen nicht gleich: *a.* $- lG = 45 \cdot 22 >$ als *c.* $+ lG = 35 \cdot 85$ Procente.

Wie wir hier sehen können, wirkt die Methode der Wahrscheinlichkeits-Rechnung bei den Zahlenreihen wie ein Vergrösserungsglas, indem sie uns auf Einzelheiten aufmerksam macht, die beim unbewaffneten Auge ganz unbemerkt bleiben müssen.

Wir haben hier, zur gemeinverständlichen Demonstration des Gauss'schen Gesetzes, eine möglichst einfache, im Groben ganz symmetrisch zusammengesetzte Zahlenreihe vor uns, welche uns doch einen Einblick in die vielerlei Complicationen bei „zufälligen“ Naturerscheinungen gewährt. — Wir können nun einen weiteren Schritt nach dieser Richtung hin unternehmen, um das Gauss'sche Gesetz ohne Inanspruchnahme der höheren Mathematik — mittelst eines Beispieles — noch deutlicher zu veranschaulichen. Es soll hier als Substrat dieselbe, bereits bekannte Zahlenreihe dienen, und die ganze Veränderung an derselben soll sich allein auf die Anzahl der Einzelfälle beschränken (*Ob*, *M*, *cM*, $S - \delta = S + \delta$ bleibt unverändert). — Wie wir wissen, beruht die volle Gesetzmässigkeit zufälliger Zahlenreihen auf der Voraussetzung, dass alle möglichen Einzelfälle der Zufälligkeiten in Betracht gezogen werden. Alle Möglichkeiten können wir nicht mittelst einer concreten (speciellen) Zahlenreihe demonstriren, wir können aber durch eine sehr grosse Vermehrung der Einzelfälle diesem Postulat des Gauss'schen Gesetzes verhältnissmässig sehr nahe kommen, — in dem Sinne der Statistik („Gesetz der grossen Zahl“). — Der ausschlaggebende Einfluss der „grossen Zahl“ auf das deutlichere Hervortreten der Gesetzmässigkeit soll durch die folgende Zahlenreihe demonstrirt werden.

(Siehe Seite 398.)

Charakteristik der Zahlenreihe.

1. $N = 123222226$ Einzelfälle
2. $Ob = 1 - 23 = 23$ Einheiten
3. $M = \frac{S}{N} = \frac{1478666712}{123222226} = 12$
4. $cM = \frac{1 + 23}{2} = 12$

Laufende Nummer	Werthgrössen	Einzelfälle der Werthgrössen	Summe der einzelnen Werthgrössen	Differenzen der Werthgrössen von $M = 12$	Summe der Differenzen der einzelnen Werthgrössen	Quadrate der einzelnen Differenzen	Summe der Quadrate der einzelnen Differenzen	Variations-Gruppen
1	1	1	1	— 11	— 11	121	121	
2	2	1	2	— 10	— 10	100	100	
3	3	1	3	— 9	— 9	81	81	
4	4	10	40	— 8	— 80	64	640	
5	5	100	500	— 7	— 700	49	4900	a. —1G.
6	6	1000	6000	— 6	— 6000	36	36000	
7	7	10000	70000	— 5	— 50000	25	250000	
8	8	100000	800000	— 4	— 400000	16	1600000	
9	9	1000000	9000000	— 3	— 3000000	9	9000000	
10	10	15000000	150000000	— 2	— 30000000	4	60000000	
11	11	30000000	330000000	— 1	— 30000000	1	30000000	
12	12	31000000	372000000	0	0	0	0	b.cG.
13	13	30000000	390000000	+ 1	+ 30000000	1	30000000	
14	14	15000000	210000000	+ 2	+ 30000000	4	60000000	
15	15	1000000	15000000	+ 3	+ 3000000	9	9000000	
16	16	100000	1600000	+ 4	+ 400000	16	1600000	
17	17	10000	170000	+ 5	+ 50000	25	250000	
18	18	1000	18000	+ 6	+ 6000	36	36000	c. +1G.
19	19	100	1900	+ 7	+ 700	49	4900	
20	20	10	200	+ 8	+ 80	64	640	
21	21	1	21	+ 9	+ 9	81	81	
22	22	1	22	+ 10	+ 10	100	100	
23	23	1	23	+ 11	+ 11	121	121	
$Ob = 1 - 23$		$N = 123222226$	$S = 1478666712$	$Ob = 22$ Einh. der Differenzen	$S - \delta = 63456810$ $S + \delta = 63456810$ $SD = 126913620$		$SD^2 = 201783684$	

5. $Oe = \frac{SD}{N} = \frac{126913620}{123222226} = 1 \cdot 03$

6. $r = 0 \cdot 6745 \times \sqrt{\frac{SD^2}{N-1}} = 0 \cdot 86 \left\{ \sqrt{\frac{SD^2}{N-1}} = \right.$ $\sqrt{\frac{201783684}{123222225}} = \sqrt{1 \cdot 64} = 1 \cdot 2806;\ 0 \cdot 6745 \times 1 \cdot 28 =$ $\left. 0 \cdot 863360 \right\}$

7. $R = \frac{r}{\sqrt{N}} = \frac{0 \cdot 86}{\sqrt{123222226}} = \frac{0 \cdot 86}{1110 \cdot 06} = 0 \cdot 00077$

8. Schwankungsbreite der centralen Variations-Gruppe:

$$\left\{ \begin{array}{r} \text{zwischen: } M - r = 12 - 0 \cdot 86 = 11 \cdot 14 \\ \text{und: } M + r = 12 + 0 \cdot 86 = 12 \cdot 86 \end{array} \right\}$$

9. Eintheilung der Zahlenreihe in die drei Variations-Gruppen. Dies geschieht auf Grundlage der Bestimmung der centralen Gruppe (hier zwischen M — r = 11·14 und M + r = 12·86). Weil in dieser Zahlenreihe nur ganze Einheiten der Werthgrössen vorkommen, müssten, behufs einer ganz pünktlichen Eintheilung, zwischen die ganzen Einheiten die Decimalen und Centimalen eingeschaltet (interpolirt) werden. Darüber bei einer anderen Gelegenheit; diesmal wollen wir von einer solchen Eintheilung absehen und nur von ganzen Einheiten ausgehen. Demnach muss: 11,14 = 11 und 12,86 = 13 Einheiten genonmmen werden. Die Eintheilung wird also sein:

a — l G:	von Werthgr. 1 bis 10	= 10 Einheiten	oder =	43,48 pCt. (von 23 Einh.)
b c G:	„ „ 11 „ 13	= 3 „	„ =	13,04 „
c + l G:	„ „ 14 „ 23	= 10 „	„ =	43,48 „
	Totale Summe	= 23 einz. Werthgr.	=	100,00 pCt.

10. Vertheilung der Einzelfälle unter die drei Variations-Gruppen:

a — l G:	Summe d. Einzelf. =	16111113 od.	= 13,07 pCt. (v. 123222226 Einzelf.)
b c G:	„ „ =	91000000 „	= 73,85 „
c + l G:	„ „ =	16111113 „	= 13,07 „
	Totale Summe: N =	123222226 „	= 99,99 pCt.

11. Vertheilung der Wiederholungen der einzelnen Werthgrössen zwischen den drei Variationsgruppen:

a — l G	bei 16111113 Einzelf. =	16111103 Wiederh.	= 13,07 pCt. (v. 123222203 [Wiederh.)
b. c G	„ 91000000 „ =	90999997 „	= 73,85 „
c + l G	„ 16111113 „ =	16111103 „	= 13,07 „
	bei 123222226 Einzelf. =	123222203 Wiederh.	= 99,99 pCt.

12. Vertheilung der Differenzen unter die drei Variations-Gruppen:

a — lG:	Summe der Diff. =	33456810	oder =	26,36 pCt.	(v. 126913620 Diff.)
b. cG:	„ „ „ =	60000000	„ =	47,28 „	
c + lG:	„ „ „ =	33456810	„ =	26,36 „	
	SD =	126913620	oder =	100,00 pCt.	

13. Die Zusammensetzung der Reihe in Bezug auf die symmetrische Vertheilung der Differenzen:

Bei vollkommener Gesetzmässigkeit	$S - \delta = S + \delta$	a — lG = 25 pCt.
In der Zahlenreihe . . .	— 63456810 = + 63456810	a — lG = 26,36 „
		Diff. = + 1,36 pCt.

Bei vollkommener Gesetzmässigkeit	b. cG = 50 pCt.	c + lG = 25 pCt.
In der Zahlenreihen	b. cG = 47,28 „	c + lG = 26,36 „
	Diff. = — 2,72 pCt.	Diff. = + 1,36 pCt.

Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: Summe der Diff. bei a — lG = c + lG
In der Zahlenreihe: „ „ „ „ 33456810 = 33456810

14. Die Schwankungsbreite, innerhalb welcher die centrale Zahl vorkommen muss:

$$\left.\begin{array}{l} M - r = 13 - 0{\cdot}00077 = 11{\cdot}99923 \\ M + r = 12 + 0{\cdot}00077 = 12{\cdot}00077 \end{array}\right\} Ob = 0{\cdot}00155 \text{ Einh.}$$

Weil in der Zahlenreihe nur ganze Einheiten der Werthgrössen vorkommen, muss diese ohnehin sehr geringe Abweichung verdeckt bleiben; es ist also hier: cM = M = 12.

Wir sehen, dass, wie wohl die Zusammensetzung der Zahlenreihe ganz dieselbe blieb, wie bei der vorigen Zahlenreihe, das Gauss'sche Gesetz hier, — in Folge der einfachen Vermehrung der Einzelfälle, — beinahe vollkommen zum Ausdrucke gelangt.

1. Auch hier verlaufen die Variationen zwischen zwei Grenzwerthen: $-l = 1$, $+l = 23$.

2. Auch hier ist die centrale mit der arithmetischen Mittelzahl gleich: $cM = M = 12$.

3. Auch hier haben wir es mit einer ganz symmetrischen Zusammensetzung der Zahlenreihe zu thun: *a.* sind hier die Einzelfälle der Werthgrössen linker — und rechterseits von der centralen oder arithmetischen Mittelzahl ganz gleichmässig vertheilt, z. B.

bei 11 = 30000000, wie auch bei 13 = 30000000 Einzelfälle
„ 10 = 15000000, „ „ „ 14 = 15000000 „
„ 9 = 1000000, „ „ „ 15 = 1000000 „

und so weiter. — *b.* Ist nicht nur $S - \delta = 63456810$ gleich mit $S + \delta = 63456810$, sondern ausserdem sind noch die einzelnen Differenzen linker- und rechterseits von der centralen oder arithmetischen Mittelzahl ganz gleichmässig verheilt:

bei 11 = — 30000000, wie auch bei 13 = + 30000000 Diff.
„ 10 = — 30000000, „ „ „ 14 = + 30000000 „
„ 9 = — 3000000, „ „ „ 15 = + 3000000 „
und so weiter.

4. Auch hier geht die Variation von dem Mittelpunkte (cM) aus und ihre Energie ist hier am grössten (daher auch die grösste Anzahl der Einzelfälle bei $cM = 12$, nehmlich = 31000000 Einzelfälle). Diese Energie nimmt in centrifugaler Richtung stets ab, und zwar zunächst, nehmlich zwischen $M - r$ und $M + r$, d. h. zwischen den Werthgrössen (Gliedern) 11 und 13, sehr wenig: bei 11 = 30000000, bei 12 = 31000000, bei 13 = 30000000, um dann viel stärker abzunehmen:

cM

bei 12 = 31000000 Einzelfälle,

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{bei } 10 & = & 15000000 \\ „\ 9 & = & 1000000 \\ „\ 8 & = & 100000 \\ „\ 7 & = & 10000 \\ „\ 6 & = & 1000 \\ „\ 5 & = & 100 \\ „\ 4 & = & 10 \\ „\ 3 & = & 1 \end{array}\right\} \text{Einzelfälle}$$

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{bei } 14 & = & 15000000 \\ „\ 15 & = & 1000000 \\ „\ 16 & = & 100000 \\ „\ 17 & = & 10000 \\ „\ 18 & = & 1000 \\ „\ 19 & = & 100 \\ „\ 20 & = & 10 \\ „\ 21 & = & 1 \end{array}\right\} \text{Einzelfälle}$$

Freilich, weil hier $-l$ nicht $= \infty - l$ und $+ l$ nicht $= \infty + l$ ist, kann auch die Energie nicht bis auf den Nullpunkt herabsinken.

5. Es fällt demzufolge die grosse Ueberzahl der Einzelfälle auf die centrale Gruppe cG = 73,85 pCt. der

Einzelfälle, hingegen auf die beiden endständigen Gruppen nur $= 26{,}14$ pCt. (nehmlich auf $-\,lG = 13{,}07$ und auf $+\,lG$ ebenfalls $= 13{,}07$ pCt. der Einzelfälle).

6. Da die Energie der Variation sich in den Wiederholungen derselben Werthgrössen (Glieder) kundgiebt, muss auch die Anzahl der Wiederholungen im Mittelpunkte (cM) am allergrössten, sowie in der centralen Variations-Gruppe (cG) bedeutend grösser sein, als in den beiden endständigen Gruppen ($-\,lG$ und $+\,lG$).

Wiederholungen einer und derselben Werthgrösse:
bei $cM = 30999999$ Wiederholungen von der Werthgrösse $= 12$, bei 11 und 13 je $= 29999999$, und so weiter;
innerhalb $cG = 90999997 = 73{,}85$ pCt. und innerhalb $-\,lG$ und $+\,lG$ insgesammt $= 32222206 = 26{,}14$ pCt. (d. h. $-\,lG = 16111103$ und $+\,lG = 16111103$ Wiederholungen).

7. Nur in Bezug auf die Vertheilung der Differenzen kann die Gesetzmässigkeit auch bei dieser Zahlenreihe nicht vollkommen zum Ausdrucke gelangen. Bei vollkommener Gesetzmässigkeit müsste die Vertheilung der Differenzen unter die drei Variations-Gruppen sein, wie folgt:

$$\begin{array}{lcrl}
a\,-\,lG & = \tfrac{1}{4}\,SD = & 25 & \text{pCt., sie ist aber:} \\
b.\;\; cG & = \tfrac{1}{2}\,SD = & 50 & \text{,, ,, ,, ,,} \\
c\,+\,lG & = \tfrac{1}{4}\,SD = & 25 & \text{,, ,, ,, ,,} \\
\hline
\text{Summe } & SD = & 100 & \text{pCt.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcrl}
a\,-\,lG & = & 26{,}36 & \text{pCt. (Diff.} = +\,1{,}36 \text{ pCt.)} \\
b.\;\; cG & = & 47{,}28 & \text{,, (Diff.} = -\,2{,}72 \text{ ,,} \\
c\,+\,lG & = & 26{,}36 & \text{,, (Diff.} = +\,1{,}36 \text{ ,,} \\
\hline
\text{Summe } SD & = & 100{,}00 & \text{pCt.}
\end{array}$$

Da ich hier nur den Zweck verfolgte, das auf sehr complicirte Berechnungen sich beziehende Gauss'sche Gesetz ohne jede Schwierigkeit verständlich zu machen, so kann diese Zahlenreihe nach dieser Richtung hin vollkommen genügen; ich habe nach vielen Versuchen eben diese Zahlenreihe am geeignetsten gefunden. — Ich darf wohl hoffen, mittels meiner Demonstrationen die an und für sich sehr complicirten Einzelfragen einem allgemeinen Verständnisse näher gebracht zu haben.

Nun wollen wir zum Schluss den Ideengang bei der soeben vorgetragenen methodischen Behandlung von Zahlenreihen, nach den Haupt-Momenten, in Kürze recapituliren.

Behufs eines systematischen Studiums muss jedwede Zahlenreihe geordnet zusammengestellt werden, um einerseits die Grenzen der Variation ($- l$, $+ l$ und Ob = zwischen $- l$ und $+ l$), andererseits die Vertheilung der Einzelfälle (bezw. die Wiederholungen der einzelnen Werthgrössen) überhaupt kennen zu lernen. Bei dieser Einordnung können die Einzelglieder (Einzelwerthgrössen), den drei logischen Vergleichsstufen gemäss, in drei Gruppen eingetheilt werden (1. kleine, 2. mittlere und 3. grosse Werthgrössen). Nun trachtet man, eine gewisse Durchschnitts-Werthgrösse, die arithmetische Mittelzahl, zu bestimmen. Hat diese Werthgrösse zugleich die Bedeutung einer centralen Zahl (cM), so wissen wir schon, dass die Zusammensetzung der Zahlenreihe eine symmetrische sein muss; und umgekehrt, bemerkt man bei einer Zahlenreihe eine symmetrische Zusammensetzung, so muss auch die arithmetische Mittelzahl zugleich eine centrale Werthgrösse darstellen. — Die symmetrische Zusammensetzung erkennt man am sichersten an der Vertheilung der Differenzen (der einzelnen Werthgrössen von der arithmetischen Mittelzahl); und zwar muss in diesem Falle nicht nur die Summe der linksseitigen gleich der Summe der rechtsseitigen Differenzen sein ($S - \delta = S + \delta$), sondern es müssen ausserdem noch die Einzelfälle (Häufigkeit) der Differenzen von einem jeden linksseitigen Gliede (Werthgrösse) den Einzelfällen der Differenz des symmetrisch entsprechenden rechtsseitigen Gliedes ganz gleich sein. — Ebenso, wie wir hinsichtlich der Einzel-Werthgrössen der Zahlenreihe eine Durchschnittszahl, d. i. arithmetische Mittelzahl, berechnet haben, müssen wir dies auch bezüglich ihrer Differenzen von der arithmethischen Mittelzahl thun. Man nennt diese Werthgrösse den Oscillations-Exponenten = Oe. — Diese ist also auch nur eine arithmetische Mittelzahl. — Um auch bezüglich der Differenzen eine centrale Mittelzahl ermitteln zu können, müssen hier sehr complicirte Momente in Rechnung gebracht werden, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Wollen wir uns hier mit dem allgemeingültigen Ergebniss derselben bescheiden, welche in der folgenden Formel ihren präcisen Ausdruck erhält: $r = 0{\cdot}6745 \times \sqrt{\frac{SD^2}{N-1}}$. In dieser Formel bedeutet, wie wir bereits wissen, r = die wahrscheinliche Abweichung (Lexis), oder den sogenannten wahrscheinlichen Fehler (r = error probabilis). — Die Anwendung dieser Formel wurde bereits durch Beispiele erklärt. — Welche Bedeutung hat r? — r hat, wie man sich in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung ausdrückt, die Bedeutung: dass man 1 gegen 1 wetten kann, dass ihre Werthgrösse innerhalb der Reihe der Differenzen ebenso oftmals nicht erreicht wird, als sie übertroffen ist. — Vermindert man also die Werthgrösse der Mittelzahl um die Werthgrösse von r ($M - r$) einerseits, oder vergrössert man dieselbe um die Werthgrösse von r ($M + r$), so sind hierdurch jene zwei Werthgrössen als Grenzen angegeben, innerhalb derer, wenn die Gesetzmässigkeit vollkommen zur Geltung gelangt, einerseits die absolute Ueberzahl der Einzelfälle, sowie die allermeisten Wiederholungen der einzelnen Einzelfälle, andererseits die halbe Summe sämmtlicher Differenzen der Zahlenreihe vorkommen müssen. — Ich betrachte demzufolge diese Gruppe der Einzelfälle als geradezu charakteristisch, als ächt typisch für die ganze Zahlenreihe; diese Gruppe giebt den Ausschlag für die Beurtheilung der ganzen Zahlenreihe. — Auf diese Weise ist somit bei derartigen („zufälligen") Zahlenreihen das Haupt-Moment von der arithmetischen Mittelzahl auf die centrale Gruppe der Einzelwerthgrössen verlegt worden; wir dürfen deshalb auch bei den kraniometrischen (ebenfalls zufälligen, d. h. höchst complicirten) Zahlenreihen uns nie mit der Bestimmung der arithmetischen Mittelzahl begnügen. Anstatt einer einzigen Werthgrösse (d. i. die arithmetische Mittelzahl) müssen wir immer zwei Werthgrössen innehalten, nehmlich: $M - r$ (hier ist die Werthgrösse = 11,14) und $M + r$ (= 12,86). Wenn wir also diese Werthgrössen einmal kennen, so wissen wir, dass zwischen diesen beiden die allermeisten Einzelfälle und die allermeisten Wiederholungen bei den einzelnen Werthgrössen vorkommen müssen, — was doch behufs einer Beurtheilung, sowie bei einer Vergleichung der einzelnen Zahlenreihen genügen kann. Also nicht die Werthgrösse der arithmetischen Mittelzahl, sondern sämmtliche Werthgrössen zwischen $M - r$ und $M + r$ (innerhalb welcher selbstverständlich auch die arithmetische Mittelzahl vorkommt) drücken das charakteristische Gepräge, d. h. den ächten Typus für die ganze Zahlenreihe aus. Alle übrigen Werthgrössen, welche ausserhalb der centralen Gruppe (in den beiden endständigen Gruppen: $- lG$ und $+ lG$) vorkommen, haben nunmehr eine nebensächliche Bedeutung, sie stellen nur Nebentypen vor. Wie so eben erwähnt, muss zwischen den Einzelwerthgrössen der centralen Gruppe auch die arithmetische Mittelzahl vorkommen; die Werthgrösse derselben erreicht aber nur dann eine Wichtigkeit, wenn sie zugleich eine centrale Werthgrösse darstellt, — was nur bei einer vollkommen symmetrischen Zusammensetzung der Zahlenreihe der Fall ist. Ich habe gezeigt, dass, wenn eine einfache, continuirliche Zahlenreihe symmetrisch zusammengesetzt ist, die centrale Mittelzahl ganz leicht dadurch berechnet werden kann, dass man die Werthgrösse der beiden Endglieder addirt und ihre Summe durch 2 theilt. Bei den complicirten „zufälligen" Zahlenreihen können nur die Grenzen berechnet werden, innerhalb welcher die Werthgrösse der centralen Zahl fallen muss, — und zwar mittelst der Werthgrösse der sog. Präcisionzahl $= R \left(\mathrm{R} = \frac{\mathrm{r}}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)$. — Die Grenzen werden ebenso bestimmt, wie dies bei der Bestimmung der centralen Gruppe der Fall war. — Man zieht die Werthgrösse R von M ($M - R$) einerseits ab, und fügt dieselbe M hinzu ($M + R$). Die Werthgrösse muss demnach zwischen $M - R$ (hier $= 12 - 0{\cdot}00077 = 11{\cdot}99923$) und zwischen $M + R$ (hier $= 12 + 0{\cdot}00077 = 12{\cdot}00077$) enthalten sein.

Weil jedwede Erkenntniss, jedwede Erklärung nur auf Grundlage der Erkenntniss einer Gesetzmässigkeit beruht, und die Erkenntniss der letzteren bei zufälligen Zahlreihen nur mittels Berechnung von r möglich ist, so werden wir doch einsehen, dass wir fürderhin bei einer wissenschaftlichen Behandlung der kraniometrischen Zahlenreihen das Hauptgewicht auf die Ermittelung der Werthgrösse von r legen müssen. Alles übrige, was bei der Aufstellung der speciellen Momente bei einer zufälligen Zahlenreihe nöthig ist, ergiebt sich aus der weiteren Anwendung von r. — Da wir aber wissen, dass die Gesetzmässigkeit bei zufälligen Naturerscheinungen vollkommen nur in Bezug auf allerlei Möglichkeiten der Einzelfälle zur Geltung gelangen kann, so wissen wir auch, dass wir bei unseren kraniometrischen Zahlenreihen ein für allemal davon absehen müssen, etwa eine vollkommene Gesetzmässigkeit nachzuweisen. Wir müssen uns mit der Möglichkeit bescheiden, eine mehr oder minder grosse Wahrscheinlichkeit für die Gesetzmässigkeit bei unseren kraniometrischen Zahlenreihen aufzuweisen. Es steht nur soviel in unserer Macht, dass wir wenigstens diese Wahrscheinlichkeit erhöhen können, und auch dies nur durch eine möglichst grosse Vermehrung der Einzelfälle, indem wir unsere Beobachtungsreihe auf möglichst viele Einzelfälle ausdehnen. Man kann dieses einflussreiche Moment in Bezug auf die wissenschaftliche Erforschung der anthropologischen Probleme derzeit gar nicht genug hervorheben, da man immer noch zu der Illusion hinneigt, schon aus wenigen Einzelfällen der Beobachtung möglichst viele Resultate herauszuschlagen. Diese Neigung rächt sich aber bitter, weil wir nie sicher sind, dass unsere Speculationen von einer Widerlegung verschont bleiben; im Gegentheil können wir auf eine solche immer gefasst sein, wie dies auch die Geschichte unserer Disciplin bestätigt, die uns eine wahre Musterkarte von Widersprüchen vorzeigt. — Ich habe schon den Einfluss der Vermehrung der Einzelfälle auf das deutlichere Hervortreten der Gesetzmässigkeit demonstrirt; nun will ich auch den Einfluss der Verminderung der Einzelfälle klar vor Augen führen, und zwar bei derselben Zahlenreihe. Behufs einer leichten Uebersicht stelle ich die folgenden drei Zahlenreihen auf, bei welchen die Anzahl der verschiedenen

Werthgrössen (Glieder), somit auch die Schwankungsbreite der Variation, folglich auch die arithmetische Mittelzahl ganz dieselbe bleibt, und nur die Anzahl der Einzelfälle variirt.

Der Einfluss der Anzahl der Einzelfälle auf das Hervortreten der Gesetzmässigkeit bei zufälligen Zahlenreihen.

a) Zahlenreihe.

Lauf. No.	Werth-grössen	Einzelfälle	Summe der einz. Werth-grössen.	Differ. von $M = 12$.	Summe der einzelnen Differenzen.	Quadrate der einz. Differenz.	Summe der Quadrate d. einzelnen Differenzen.	Variat.-Gruppen.
1	1	1	1	−11	− 11	121	121	
2	2	1	2	−10	− 10	100	100	
3	3	1	3	− 9	− 9	81	81	
4	4	2	8	− 8	− 16	64	128	
5	5	2	10	− 7	− 14	49	98	a. — 1 G.
6	6	10	60	− 6	− 60	36	360	
7	7	10	70	− 5	− 50	25	250	
8	8	20	160	− 4	− 80	16	320	
9	9	20	180	− 3	− 60	9	180	
10	10	30	300	− 2	− 60	4	120	
11	11	31	341	− 1	− 31	1	31	
12	12	32	384	0	0	0	0	b. c G.
13	13	31	403	+ 1	+ 31	1	31	
14	14	30	420	+ 2	+ 60	4	120	
15	15	20	300	+ 3	+ 60	9	180	
16	16	20	320	+ 4	+ 80	16	320	
17	17	10	170	+ 5	+ 50	25	250	
18	18	10	180	+ 6	+ 60	36	360	
19	19	2	38	+ 7	+ 14	49	98	c + 1 G.
20	20	2	40	+ 8	+ 16	64	128	
21	21	1	21	+ 9	+ 9	81	81	
22	22	1	22	+10	+ 10	100	100	
23	23	1	23	+11	+ 11	121	121	
$Ob = 23$		$N = 288$	$S = 3456$		$S - \delta = 401$ $S + \delta = 401$ $SD = 802$		$SD^2 = 3578$	

(Siehe Seite 408 und 409.)

Nach den voraufgegangenen Erläuterungen wird es vollkommen hinreichen, wenn die Charakteristik aller drei Zahlenreihen in Einem ziffermässig angedeutet wird.

(Siehe Seite 410 und 411.)

Durch die Aufstellung dieser drei Zahlenreihen ist es gelungen, auf möglichst vereinfachte Weise, — ohne Inanspruchnahme der

b) Zahlenreihe.

Lauf. No.	Werth-grössen	Einzelfälle	Summe der einz. Werthgrössen	Differ. von $M = 12$.	Summe der einzelnen Differenzen.	Quadrate der einz. Differenz.	Summe der Quadrate d. einzelnen Differenzen.	Variat.-Gruppen.
1	1	1	1	−11	−11	121	121	a. −1 G.
2	2	1	2	−10	−10	100	100	
3	3	1	3	−9	−9	81	81	
4	4	10	40	−8	−80	64	640	
5	5	10	50	−7	−70	49	490	
6	6	10	60	−6	−60	36	360	
7	7	100	700	−5	−500	25	2500	
8	8	300	2400	−4	−1200	16	4800	
9	9	400	3600	−3	−1200	9	3600	
10	10	410	4100	−2	−820	4	1640	
11	11	419	4609	−1	−419	1	419	b. c G.
12	12	420	5040	0	0	0	0	
13	13	419	5447	+1	+419	1	419	
14	14	410	5740	+2	+820	4	1640	
15	15	400	6000	+3	+1200	9	3600	c. +1 G.
16	16	300	4800	+4	+1200	16	4800	
17	17	100	1700	+5	+500	25	2500	
18	18	10	180	+6	+60	36	360	
19	19	10	190	+7	+70	49	490	
20	20	10	200	+8	+80	64	640	
21	21	1	21	+9	+9	81	81	
22	22	1	22	+10	+10	100	100	
23	23	1	23	+11	+11	121	121	
$Ob = 23$		$N = 3744$	$S = 44928$		$S - \delta = 4379$ $S + \delta = 4379$ $SD = 8758$		$SD^2 = 29502$	

(Siehe Seite 409.)

höheren Mathematik, — das Wesen complicirter („zufälliger“) Zahlreihen in Bezug auf ihre Gesetzmässigkeit schärfer ins Auge zu fassen, als dies bisher möglich war.

Wir sehen, dass bei Gleichheit der einzelnen Werthgrössen (Glieder) der Schwankungsbreite ihrer Variation und der arithm. Mittelzahl die Gesetzmässigkeit mit der Zunahme der Einzelfälle Hand in Hand geht. Haben wir also kraniometrische Zahlenreihen vor uns, die sich auf die Variationen eines und desselben Maasses beziehen (wie hier z. B. auf die Capacität), so wissen wir schon im Voraus, d a s s d i e f ü r s ä m m t l i c h e z u f ä l l i g e n Z a h l e n r e i h e n g l e i c h m ä s s i g g ü l t i g e G e s e t z m ä s s i g k e i t i n d e m M a a s s t a b e d e u t l i c h e r z u m A u s d r u c k e g e l a n g e n m u s s , j e g r ö s s e r d i e A n z a h l d e r e i n z e l n e n B e o b a c h-

c. Zahlreihe.

Laufende Nummer	Werthgrössen	Einzelfälle	Summe der einzelnen Werthgrössen	Differenzen von M = 12	Summe der Differenzen	Quadrate der Differenzen	Summe der Quadrate der Differenzen	Variations-Gruppen
1	1	1	1	— 11	— 11	121	121	a. — 1G.
2	2	1	2	— 10	— 10	100	100	
3	3	1	3	— 9	— 9	81	81	
4	4	10	40	— 8	— 80	64	640	
5	5	100	500	— 7	— 700	49	4900	
6	6	1000	6000	— 6	— 6000	36	36000	
7	7	10000	70000	— 5	— 50000	25	250000	
8	8	100000	800000	— 4	— 400000	16	1600000	
9	9	1000000	9000000	— 3	— 3000000	9	9000000	
10	10	15000000	150000000	— 2	— 30000000	4	60000000	
11	11	30000000	330000000	— 1	— 30000000	1	30000000	b.cG.
12	12	31000000	372000000	0	0	0	0	
13	13	30000000	390000000	+ 1	+ 30000000	1	30000000	
14	14	15000000	210000000	+ 2	+ 30000000	4	60000000	c. + 1G.
15	15	1000000	15000000	+ 3	+ 3000000	9	9000000	
16	16	100000	1600000	+ 4	+ 400000	16	1600000	
17	17	10000	170000	+ 5	+ 50000	25	250000	
18	18	1000	18000	+ 6	+ 6000	36	36000	
19	19	100	1900	+ 7	+ 700	49	4900	
20	20	10	200	+ 8	+ 80	64	640	
21	21	1	21	+ 9	+ 9	81	81	
22	22	1	22	+ 10	+ 10	100	100	
23	23	1	23	+ 11	+ 11	121	121	
$Ob = 23$		$N = 123222226$	$S = 1478666712$		$S - \delta = 63456810$ $S + \delta = 63456810$ $SD = 126913620$		$SD^2 = 201783684$	

Das Verhalten der Gesetzmässigkeit bei den drei Zahlenreihen.

1. Die einzelnen Werthgrössen (Glieder) sind bei allen dreien dieselben: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23.

Zahlenreihe:	a		b		c	
2. Ob =		23		23		23
3. N =		288		3744		123222226
4. S =		3456		44928		1478666712
5. $M = \frac{S}{N} =$	$\frac{3456}{288} =$	12	$\frac{44928}{3744} =$	12	$\frac{1478666712}{123222226} =$	12
6. $cM = \frac{(-l)+(+l)}{2} =$	$\frac{1+23}{2} =$	12	$\frac{1+23}{2} =$	12	$\frac{1+23}{2} =$	12
7. $S-\delta =$	401		4379		63456810	
$S+\delta =$	401		4379		63456810	
SD =		802		8758		126913620
8. $Oe = \frac{SD}{N} =$	$\frac{802}{288} =$	2,78	$\frac{8758}{3744} =$	2,34	$\frac{126913620}{123222226}$	1,03
9. SD =		3578		29502		201783684
$\sqrt{\frac{SD^2}{N-1}} =$	$\sqrt{\frac{3578}{287}} = \sqrt{12,47} =$	3,53	$\sqrt{\frac{29502}{3743}} = \sqrt{7,88} =$	2,81	$\sqrt{\frac{201783684}{123222225}} = \sqrt{1,64} =$	1,28
	$0,6745 \times 3,53 =$	2,38	$0,6745 \times 2,81 =$	1,90	$0,6745 \times 1,28 =$	0,86
10. $r = 0,6745 \times \sqrt{\frac{SD^2}{N-1}}$		2,38		1,90		0,86
11. $R = \frac{r}{\sqrt{N}} =$	$\frac{2,38}{\sqrt{288}} = \frac{2,38}{16,97} =$	0,14	$\frac{1,90}{\sqrt{3744}} = \frac{1,90}{61,19} =$	0,03	$\frac{0,86}{\sqrt{123222226}} = \frac{0,86}{1110,06} =$	0,00077
12. $M - r =$	$12 - 2,38 =$	9,62	$12 - 1,90 =$	10,10	$12 - 0,86 =$	11,14
$M + r =$	$12 + 2,38 =$	14,38	$12 + 1,90 =$	13,90	$12 + 0,86 =$	12,86

Zahlenreihe:	a	b	c
13. Die Variations-Gruppen	a—lG= 1— 9=9Einh.=39,13 pCt. b cG=10—14=5 „ =21,74 „ c+lG=15—23=9 „ =39,13 „ S = 23Einh.=100,00 pCt.	a—lG= 1—10=10Einh.=43,48pCt. b cG=11—14= 4 „ =17,39 „ c+lG=15—23= 9 „ =39,13 „ S.=23Einh.=100,00pCt.	a—lG= 1—10=10Einh.=43,48 pCt. b cG=11—13= 3 „ =13,04 „ c+lG=14—23=10 „ =43,48 „ S.=23Einh.=100,00pCt.
14. Einzelfälle innerhalb der drei Variat. Gruppen	a—lG= 67 = 23,26 pCt. b cG=154 = 53,47 „ c+lG= 67 = 23,26 „ Se.(N)=288 = 99,99 pCt.	a—lG=1243 = 33,20pCt. b cG=1668 = 44,55 „ c+lG= 833 = 22,25 „ Se.(N)=3744 = 100,00pCt.	a—lG= 16111113 = 13,07pCt. b cG= 91000000 = 73,85 „ c+lG= 16111113 = 13,07 „ Se.(N)=123222226 = 99,99pCt.
15. Wiederholungen innerhalb der drei Variat.-Gruppen	a—lG= 58 = 21,89 pCt. b cG=149 = 56,23 „ c+lG= 58 = 21,89 „ S =265 = 100,01 pCt.	a+lG=1233 = 33,14pCt. b cG=1664 = 44,72 „ c+lG= 824 = 22,14 „ S=3721 = 100,00pCt.	a—lG= 16111103 = 13,07pCt. b cG= 90999997 = 73,85 „ c+lG= 16111103 = 13,07 „ S=123222203 = 99,99pCt.
16. Summe d. Differenzen innerhalb der 3 Variat.-Gruppen	a—lG=310 = 38,65 pCt. b cG=182 = 22,69 „ c+lG=310 = 38,65 „ SD=802 = 99,99pCt.	a—lG=3960 = 45,22pCt. b cG=1658 = 18,93 „ c+lG=3140 = 35,85 „ SD=8758 = 100,00pCt.	a—lG= 33456810 = 26,36pCt. b cG= 60000000 = 47,28 „ c+lG= 33456810 = 26,36 „ SD=126913620 = 100,00pCt.
17. Die Schwankungsbreite innerhalb welcher die centrale Zahl vorkommen muss	12—0,4 = 11,86 12+0,4 = 12,14 Ob = 0,29 Einh.	12—0,03 = 11,97 12+0,03 = 12,03 Ob = 0,07 Einh.	12—0,00077 = 11,99923 12+0,00077 = 12,00077 Ob = 0,00155 Einh.

tungsfälle wird („Gesetz der grossen Zahl“); denn aus je mehr Einzelfällen der Variation eine solche Zahlenreihe besteht, um so mehr nähert sie sich auch der — allerdings nie ganz erreichbaren — Bedingung, einer alle möglichen Einzelfälle der Variation in sich vereinigenden Zahlenreihe, bei welcher dann die Gesetzmässigkeit vollends zur Geltung gelangt. Wir sehen bei der Vergleichung der drei Zahlenreihen (a, b, c), dass mit der Zunahme der Einzelfälle (N) die Function der Variation um so deutlicher zum Ausdrucke gelangt, was sich durch die centripetale Zunahme (und folglich auch durch die centrifugale Abnahme) der Wiederholungen der einzelnen Werthgrössen kundgiebt (s. No. 15); wir sehen ferner damit im Zusammenhange, dass die drei Variations-Gruppen ($a—lG$, bcG, $c+lG$) das Gauss'sche Gesetz mehr zum Ausdrucke bringen, dem entsprechend die centrale Gruppe (cG) nicht nur die absolut überwiegende Mehrzahl der Einzelfälle in sich einschliesst (s. No. 14), sondern zugleich auch eine vollkommen symmetrische Lage innerhalb der Zahlenreihe einnimmt, — da die Hälfte der sämmtlichen Differenzen der einzelnen Werthgrössen von der arithmetischen Mittelzahl, —die dann zugleich auch eine centrale Zahl sein muss —, gerade auf die centrale Gruppe fällt, und die andere Hälfte sich auf die beiden endständigen Variations-Gruppen ($a—lG$, $c+lG$) ganz gleichmässig vertheilt (s. No. 16). — Endlich sehen wir, dass mit den soeben erwähnten Momenten im innigsten Zusammenhange auch die Variationsbreite der centralen Gruppe, — innerhalb welcher also die allermeisten Einzelfälle vorkommen müssen, — immer kleiner wird (worauf sich auch schon das Kleinerwerden der Werthgrösse von: Oe und r bezieht s. No. 8 und 10), wie dies die Vergleichung bei No. 13 uns so klar verdeutlicht; dass auch zugleich die Schwankungsbreite der centralen Zahl dabei sich immer mehr verringert (No. 17).

Es ist gelungen, in den drei Zahlenreihen ein Modell aufzustellen, welches wir beim Studium beliebiger kraniometrischer Zahlenreihen mit grossem Nutzen gebrauchen können, da dasselbe uns eine rasche Vergleichung der einzelnen kraniometrischen Zahlenreihen in Bezug auf die Beurtheilung der Gesetzmässigkeit gestattet. Die elementare Wichtigkeit der hier verhandelten Frage diene zur Rechtfertigung dafür, dass wir uns hier mit derselben so lange aufgehalten haben.

Nun können wir auf unsere kraniometrischen Zahlenreihen der Capacitäts-Bestimmung wieder zurückkommen. Auf S. 279—283 sind die geordneten Zahlenreihen der Volumens-Bestimmung des Füllmateriales (*A Iα, IIα,* und *B IIIα* und *IVα*) bereits mitgetheilt worden. Wenn wir diese vier Zahlenreihen etwas näher ansehen, werden wir sofort bemerken, dass auch sie unter die zufälligen Zahlenreihen gerechnet werden müssen. — Bei dem Umstande, dass die Aufeinanderfolge der einzelnen Werthgrössen hier sich immer auf zwei Einheiten bezieht (1262, 1264, u. s. w.) so dass die auf die Einheiten des dekadischen Systems (1261, 1262, 1263, u. s. w.) fallenden Einzelfälle der Werthgrössen verdeckt bleiben müssen, — was namentlich bei der Zahlenreihe *IIα* von grossem Uebelstande ist, da hier nur vier Werthgrössen (1268 mit 37 — 1270 mit 39 — 1272 mit 19 und 1274 mit 5 Einzelfällen) vorkommen, — kann eine solche Analyse, wie wir sie in den voraufgehenden Punkten demonstrirt haben, zu gar keinem verwendbaren Resultate führen.

Wir werden also die Zahlenreihen der vier Volumen-Bestimmungen von einem ganz anderen Gesichtspunkte einer Analyse unterwerfen müssen.

Fragen wir also, worüber können uns die vier Zahlenreihen der Volumens-Bestimmung einen Aufschluss geben? Sie können uns nur darüber einen Aufschluss geben, welches von den hier in Rede stehenden vier Verfahren, behufs einer Capacitäts-Bestimmung mittelst der Volumens-Bestimmung des Füllmateriales, verhältnissmässig am meisten zweckentsprechend sei. Da bei diesen Versuchen eine bestimmte Werthgrösse (1258,8 ccm Capacität des Ranke'schen Bronzeschädels) gegeben ist, so ist die Entscheidung der Frage eine einfache. — Es ist doch klar, dass hier dasjenige Verfahren als das verhältnissmässig beste angenommen werden muss, bei welchem in der überwiegenden Mehrzahl der Einzelversuche die geringsten Fehler, d. h. die geringsten Differenzen zwischen dem Volumen des Füllmateriales und dem angegebenen Volumen des Bronzeschädels erzielt werden konnten. — Wir werden demnach die vier Zahlenreihen auf die folgenden Momente hin untereinander vergleichen müssen.

1. Die Schwankungsbreite sämmtlicher Fehler bei diesen vier Zahlenreihen bewegt sich zwischen + 3,2 (bei 1262 Volumen des Füllmateriales) und + 37,2 (bei 1296 ccm Volumen des Füllmateriales); somit beträgt Ob = 34,1 Einheiten.

2. Innerhalb dieser allgemeinen Schwankungsbreite verhalten sich die einzelnen Schwankungsbreiten der vier Zahlenreihen, wie folgt:

(Siehe Seite 415.)

Da wir bereits wissen, dass hinsichtlich einer Variationsreihe nur diejenigen Werthgrössen für typisch erklärt werden können, die unter den sämmtlichen Werthgrössen am allerhäufigsten vertreten sind, folglich auch unter den einzelnen Variations-Reihen nur diejenigen für typisch erklärt werden können, die eben typisch auftretende Werthgrössen aufweisen, so können wir bei der Vergleichung dieser vier Variations-Reihen die Entscheidung sehr leicht treffen.

In Anbetracht, dass wir bei derartigen zufälligen Variations-Reihen eine solche einzige typische Werthgrösse, deren Vertretung die absolute Mehrheit sämmtlicher Einzelfälle aufweisen würde, nicht zu gewärtigen haben, müssen wir das Typische immer bei mehreren (in der Zahlenreihe immer unmittelbar aufeinander folgenden) Werthgrössen suchen. — Auf je weniger einzelne solche Werthgrössen die absolute Mehrheit der Vertretung fällt, für um so typischer muss auch die betreffende Variations-Reihe angesehen werden. Da wir es hier immer mit 100 Einzelfällen zu thun haben, so wissen wir schon im Voraus, wie sich die totale Summe der typisch anzusehenden Werthgrössen im Allgemeinen verhalten muss. — Unter den vier Zahlenreihen (Variations-Reihen) muss die zweite

Gesuchte Werthgrösse = 1258,8 ccm.

	Totale Schwankungsbreite der Fehler:																	
Fehler-Differenzen von 1258,8 ccm.	+ 3,2	+ 5,2	+ 7,2	+ 9,2	+ 11,2	+ 13,2	+ 15,2	+ 17,2	+ 19,2	+ 21,2	+ 23,2	+ 25,2	+ 27,2	+ 29,2	+ 31,2	+ 33,2	+ 35,2	+ 37,2
Werthgrössen in ccm.	1262	1264	1266	1268	1270	1272	1274	1276	1278	1280	1282	1284	1286	1288	1290	1292	1294	1296
Specielle Schwankungsbreiten:	bei Iα: Glasperlen																	
				bei IIα: Glasperlen														
							bei IIIα: Erbsen											
									bei IVα: Erbsen									

Der grosse Vortheil der Verwendung der Glasperlen bekundet sich darin, dass einerseits kleinere Fehler bei ihrer Anwendung auftreten, und dass auch die Schwankungsbreite der Fehler eine viel kleinere ist, als bei der Anwendung von Erbsen.

3) Die Vertheilung der Einzelfälle, bezw. der Fehler, verhält sich bei den vier Zahlenreihen wie folgt:

Auf die Werthgrössen der einzelnen Fehler fallen:

Fehler-Differenzen von 1258,8 ccm.	+ 3,2	+ 5,2	+ 7,2	+ 9,2	+ 11,2	+ 13,2	+ 15,2	+ 17,2	+ 19,2	+ 21,2	+ 23,2	+ 25,2	+ 27,2	+ 29,2	+ 31,2	+ 33,2	+ 35,2	+ 37,2	
Werthgrössen in ccm.	1262	1264	1266	1268	1270	1272	1274	1276	1278	1280	1282	1284	1286	1288	1290	1292	1294	1296	
Bei Iα (Glasperlen)	1	1	9	22	24	28	12	2	1										$N = 100$
Bei IIα (Glasperlen)				37	39	19	5												$N = 100$
Bei IIIα (Erbsen)							4	6	9	10	7	13	10	13	11	6	9	2	$N = 100$
Bei IVα (Erbsen)									1	3	10	18	26	21	16	4	1		$N = 100$

(Fortsetzung S. 414: Da wir u. s. w.)

(*IIα*, wo das Volumen der Glasperlen schon bei der Füllung bestimmt wurde) als die typischste angesehen werden. — Hier ist die absolute Mehrheit der Einzelfälle schon durch zwei Werthgrössen, nehmlich 1268 (Diff. oder Fehler = + 9,2) mit 37, und 1270 (Diff. oder Fehler = + 11,2) mit 39 Einzelfällen vertreten; diese beiden Werthgrössen stellen also schon allein 76 Einzelfälle oder Procente dar. Bei der ersten Zahlenreihe (*Iα*, Glasperlen, das Volumen nachträglich bestimmt) müsste man schon drei einzelne Werthgrössen nehmen, um eine ähnlich grosse Repräsentanz der Einzelfälle erreichen zu können; hier müssten nehmlich die folgenden drei Werthgrössen genommen werden: 1268 mit 22 Einzelfällen, 1270 mit 24 und 1272 mit 28 Einzelfällen, welche drei Werthgrössen insgesammt 74 Einzelfälle oder Procente vereinigen würden. Bei den zwei Variations-Reihen des Erbsen-Füllmateriales würden aber auch nicht einmal drei einzelne Werthgrössen genügen, um die Repräsentanz einer absoluten Mehrheit der Einzelfälle erreichen zu können, — und ausserdem würden auch die Fehler hier viel grösser ausfallen, als bei dem Glasperlen-Füllmateriale. Wie wir also sehen, müssen bei einer Beurtheilung derartiger Versuchs-Reihen immer die folgenden zwei Momente ins Auge gefasst werden:

1. Damit ceteris paribus irgend ein Verfahren für vortheilhafter erklärt werden könne, muss vor Allem die überwiegende Mehrheit der Einzelfälle schon durch wenigere Werthgrössen dargestellt werden können; und 2. müssen die Fehler, die durch die überwiegende Mehrheit der Einzelfälle repräsentirt werden, kleiner ausfallen.

Ich stelle, behufs einer bequemeren Vergleichung dieser zwei Momente, die folgende Tabelle zusammen.

a. Die absolute Mehrheit fällt bei:

IIα	auf 2 Werthgrössen	(1268, 1270)	mit	76	pCt.	der	Einzelf.
Iα	„ 3 „	(1268, 1270, 1272)	„	74	„	„	„
IVα	„ 4 „	(1284, 1286, 1288, 1290)	„	81	„	„	„
IIIα	„ 5 „	(1282, 1284, 1286, 1288, 1290)	„	54	„	„	„

b. Die Werthgrössen der Fehler schwanken bei:

IIα	zwischen	+ 9,2 (1268)	und	+ 11,2 (1270)	in	76	pCt.	der	Einzelfälle
Iα	„	+ 9,2 (1268)	„	+ 13,2 (1272)	„	74	„	„	„
IVα	„	+ 25,2 (1284)	„	+ 31,2 (1290)	„	81	„	„	„
IIIα	„	+ 23,2 (1282)	„	+ 31,2 (1290)	„	54	„	„	„

Dass also unter den vier Versuchen dasjenige Verfahren, bei welchem der Schädel-Innenraum mit vorher schon volumetrisch bestimmtem Glasperlen-Materiale gefüllt wird, das allervortheilhafteste ist, wird auch durch diese Tabelle erwiesen.

Endlich müssen die Werthgrössen der typischen Fehler bei den einzelnen Versuchen auch hinsichtlich ihres procentuellen Verhältnisses zu der Werthgrösse des gesuchten oder gegebenen Volumens bestimmt werden. — Wir werden also hier in folgender Weise verfahren: Das gegebene (gesuchte) Volumen ist = 1258,8 ccm; somit entspricht 1 pCt. dieser Werthgrösse = 12,588 ccm. Da die typischen (d. h. die durch die überwiegende Mehrzahl der Einzelfälle repräsentirten) Fehler ebenfalls bereits bekannt sind, werden wir dieselben mit 12,855 vergleichen, d. h. in Verhältniss bringen. — Hierzu diene die folgende Zusammenstellung.

(Siehe Seite 418.)

Wie wir also sehen, bleiben die Werthgrössen der typischen Fehler bei dem Verfahren *IIα* stets unter einem Procente (zwischen 0,73 und 0,89 pCt.). — Es ist somit hier auf viel weniger umständliche Weise ein ebenso günstiges Resultat erreicht, wie das, welches Prof. v. Luschan bei dem Poll'schen Apparate so besonders hervorzuheben sich veranlasst sah.

Nähere Prüfung der Methode der Wägung des Füllmaterials in Bezug auf die Frage der Schädelcapacität.

Der allgemein psychologische Process experimenteller Naturforschung ist auch beim Problem der Schädelcapacitäts-Bestimmung deutlich zu erkennen. Anfangs, als man nehmlich mit den Complicationen der Schädelcapacitäts-Bestimmung noch nicht vertraut war, und die ganze Frage noch für sehr einfach hielt, war man sehr zuversichtlich, und meinte, mittelst der üblichen Volumetrie des Füllmaterials schon vollkommen verlässliche Resultate erzielen zu können. Als man aber später, in Folge von sich immer wiederholenden Erfahrungen auf die Unvermeidlichkeit gewisser Fehler bei dieser Methode aufmerksam wurde, konnte man auch die praktische Lösung des Problems

1. Bei $II\alpha$ weicht die eine typ. Werthgr. 1268 von 1258,8 um + 9,2 ccm ab; dies entspricht $\left(\frac{9,2}{12,588}\right) = 0,73$ pCt. für 12,588 ccm

und die andere „ „ 1270 „ 1258,8 „ + 11,2 „ „ „ „ $\left(\frac{11,2}{12,588}\right) = 0,89$ „ „ 12,588 „

2. Bei $I\alpha$ weicht die eine „ „ 1268 „ 1258,8 „ + 9,2 „ „ „ „ $\left(\frac{9,2}{12,588}\right) = 0,73$ „ „ 12,588 „

und die andere „ „ 1272 „ 1258,8 „ + 13,2 „ „ „ „ $\left(\frac{13,2}{12,588}\right) = 1,05$ „ „ 12,588 „

3. Bei $IV\alpha$ weicht die eine „ „ 1284 „ 1258,8 „ + 25,2 „ „ „ „ $\left(\frac{25,2}{12,588}\right) = 2,00$ „ „ 12,588 „

und die andere „ „ 1290 „ 1258,8 „ + 31,2 „ „ „ „ $\left(\frac{31,2}{12,588}\right) = 2,48$ „ „ 12,588 „

4. Bei $III\alpha$ weicht die eine „ „ 1282 „ 1258,8 „ + 23,2 „ „ „ „ $\left(\frac{23,2}{12,588}\right) = 1,48$ „ „ 12,588 „

und die andere „ „ 1290 „ 1258,8 „ + 31,1 „ „ „ „ $\left(\frac{31,2}{12,588}\right) = 2,48$ „ „ 12,588 „

(Fortsetzung S. 417: Wie wir u.s.w.)

der Schädelcapacitäts-Messung nicht mehr für so einfach und leicht halten, weshalb es uns gar nicht Wunder nehmen darf, wenn wir zu guterletzt sehen, dass ein neues Verfahren lediglich auf Kosten des alten Verfahrens belobt und so vortheilhaft hervorgehoben wird. Man ist aber nur deshalb so sanguinisch für diese neue Methode gestimmt, weil man eben noch nicht genug Erfahrungen mit den Schattenseiten dieser Methode gesammelt hat. Ich habe auf diese Schattenseiten bereits weiter oben hingewiesen und kann auch hier nicht anders, als die überschwängliche Hoffnung, die man auf diese neue Methode zu setzen bestrebt ist, für eine Illusion zu erklären. Ich habe schon weiter oben den Nachweis geliefert, dass das, was Prof. v. Luschau von dem Verfahren der Gewichts-Bestimmung so zuversichtsvoll aussagte: „Die Fehler . . . . . können fast ganz eliminirt werden, wenn das Poll'sche Verfahren dahin abgeändert wird, dass man das Füllwasser nicht durch Messung, sondern durch Wägung bestimmt", — wohl niemals in Erfüllung gehen wird; ich muss aber auch die an und für sich gewiss schon viel bescheidenere Hoffnung Prof. W. Krause's, nach welcher es möglich wäre, bei der Methode der Wägung „die Fehlerquellen wenigstens auf die Hälfte zu reduciren" (Verhandl. d. Berliner anthr. Gesellschaft, Sitzung vom 19. Dez. 1896), ebenfalls für illusorisch erklären. — Man hat nehmlich bei diesem primären Enthusiasmus vollkommen ausser Acht gelassen, dass die ursprünglichen und wesentlichen Fehler einer Capacitäts-Bestimmung, die schon bei der Füllung des Schädel-Innenraumes selbst auftreten, durch die späteren Manipulationen, — gleichviel ob eine Volumetrie oder eine Wägung des Füllmateriales angewendet wird, — nicht mehr alterirt werden können. Diese ursprünglichen Fehler werden also ebenso unverändert mitgemessen, wie sie auch unverändert mitgewogen werden, so dass höchstens nur in Bezug auf die nachträglichen accessorischen Fehler bei der weiteren Behandlung des Füllmateriales eine Aenderung erzielt werden kann, indem die speciellen Fehler der Volumetrie mit denjenigen der Wägung vertauscht werden. — Die ursprünglichen Fehler müssen aber bei dem einen Varfahren ebenso intact bleiben, wie bei dem anderen. Und wenn auch durch die Methode der Wägung das Verfahren an und für sich verkürzt und vereinfacht wird, und wenn auch grössere Fehler bei der Wägung des Füllmateriales leichter vermieden werden können, als bei der bisher üblichen Methode der Volumetrie des aus Partikelchen bestehenden soliden Füllmateriales, so kommt es hinsichtlich einer Entscheidung der Frage doch nicht hierauf, sondern lediglich nur darauf an: ob auch zwischen dem Gewichte des Füllmateriales und seines wirklichen Volumens ein constantes Verhältniss aufgestellt werden kann. Ein constantes präcises Verhältniss kann aber zwischen diesen zweierlei Maassen nur unter der einzigen Bedingung möglich sein, dass eine gewisse Raumgrösse immer nur von derselben Anzahl gleich schwerer Partikelchen ausgefüllt werden könnte, — was leider nicht der Fall ist. Wie wir also sehen müssen, wird der vorhin erwähnte Vortheil der Wägung gegenüber der Volumetrie schon durch dieses Moment allein wieder aufgehoben; und dieser Uebelstand kann so lange nicht wesentlich gehoben werden, bis wir nicht über ein solches Füllmaterial verfügen, dessen einzelne Partikelchen sowohl hinsichtlich der Form und Grösse, wie auch des Gewichtes, unter sich nur minimale Verschiedenheiten aufweisen.

Um nun entscheiden zu können, inwiefern die Methode der Wägung des Füllmateriales bei der Schädelcapacitäts-Bestimmung überhaupt anzuwenden sei, müssen wir abermals die Variationsreihen unserer Controlversuche zum Ausgangspunkte des Studiums wählen. — Wir werden demgemäss die Zahlenreihen der Wägung des Füllmateriales nach den vier besonderen Versuchen *A*. Glasperlen *Iβ* und *IIβ*; *B*. Erbsen *IIIβ* und *IVβ*) ebenso auf alle einzelnen ausschlaggebende Momente hin analysiren, wie wir dies bereits bei den Versuchen mittels der Volumen-Bestimmung ausgeführt haben.

Nach den voraufgegangenen ausführlichen Erörterungen müssen wir schon im Voraus darüber im Klaren sein, dass caeteris paribus auch hier demjenigen speciellen Verfahren ein grösserer Vortheil zugesprochen werden muss, bei welchem einerseits die Schwankungen der Einzelfälle innerhalb engerer Grenzen verlaufen, andererseits gewisse einzelne, einander sehr nahe stehende Werthgrössen der Schwankungen die absolute Mehrheit der Einzelfälle aufweisen.

Was die Schwankungsbreite (*Ob*) anbelangt, haben wir bereits oben hervorgehoben, dass dieselbe bei den Versuchsreihen der Gewichts-Bestimmung im Allgemeinen grösser ausfällt, als bei der Volumens-Bestimmung; dass aber dafür eine grössere Aehnlichkeit, d. h. geringere Abweichung der Schwankungsbreite bei den einzelnen Versuchsreihen der Gewichts-Bestimmung beobachtet werden kann, als dies bei der Volumens-Bestimmung der Fall war. — Behufs einer bequemeren Uebersicht stelle ich hier sowohl die totale Schwankungsbreite, wie auch die speciellen Schwankungsbreiten der einzelnen Versuchsreihen der Gewichts-Bestimmung im Folgenden zusammen.

(Siehe Seite 422.)

Wenn wir diese zwei Zahlenreihen uns näher besehen, so werden wir sofort auf den grossen Unterschied aufmerksam gemacht, welcher zwischen den Variations-Reihen der volumetrischen Bestimmung und denjenigen der Wägung des Füllmateriales obwaltet. Dass unser Urtheil nicht zu Gunsten der Methode der Wägung ausfallen kann, dazu zwingt uns schon die grössere Schwankungsbreite der Variationen bei der Wägung des Füllmateriales, sowie die damit Hand in Hand gehende ungünstige Vertheilung der Einzelfälle der Werthgrössen innerhalb der bedeutender gewordenen Schwankungsbreite. Schon aus diesen zwei Momenten allein können wir voraussagen, dass eine Gesetzmässigkeit bei den Variations-Reihen der Wägung nur zu einem höchst geringen Theile nachgewiesen werden kann.

Wollen wir also jetzt auf diese Frage näher eingehen, um dieselbe an der Hand von strengen Beweisen zu lösen. — Behufs eines leichteren Ueberblickes der Analyse dieser Zahlenreihen, habe ich die folgenden Tabellen zusammengestellt:

(Siehe Seite 423 und folgende.)

Schwankungsbreiten bei den Versuchsreihen der Gewichts-Bestimmung.

A. Füllmaterial: Glasperlen.

Einzelfälle . . . Summe: $N = 100$

	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	
I β	1	0	1	3	3	1	4	3	7	5	9	4	9	8	17	12	9	1	1	0	2				$Ob = 21$ Einheiten
II β			1	1	3	1	3	5	9	10	6	6	9	10	15	6	4	4	4	0	1	1	0	1	$Ob = 22$ Einheiten
																									Totale Ob = 24 Einheiten

Einzelfälle . . . Summe: $N = 100$

B. Füllmaterial: Erbsen.

Einzelfälle . . . Summe: $N = 100$

	1111	1112	1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119	1120	1121	1122	1123	1124	1125	1126	1127	1128	1129	1130	1131	1132	1133	1134	1135	1136	1137	
III β					3	0	3	4	4	2	2	7	7	6	4	11	4	3	5	12	5	6	7	2	3			$Ob = 21$ Einheiten
IV β	1	0	0	1	1	1	1	1	0	4	4	8	6	5	6	6	10	8	10	5	5	3	7	2	3	0	2	$Ob = 27$ Einheiten
																												Totale Ob = 27 Einheiten

Einzelfälle . . . Summe: $N = 100$

(Fortsetzung Seite 421: Wenn wir u.s.w.)

Zahlenreihen der Gewichts-Bestimmung des Füllmateriales.

A. Füllmaterial: Glasperlen.

I. β. Variationen des Gewichts bei nachträglicher Volumens-Bestimmung der Füllung.

Lauf. Nummer	Werthgrössen in g	Einzelfälle	Summe der einzelnen Werthgrössen	Differenzen von $M = 1962,57$	Summe der einzelnen Differenzen	Quadrate der einzelnen Differenzen	Summe der Quadrate der einzelnen Differenzen	Variations-Gruppen
1	1951	1	1951	— 11,57	— 11,57	133,8649	133,86	
2	1952	0	0	0	0	0	0	
3	1953	1	1953	— 9,57	— 9,57	91,5849	91,58	
4	1954	3	5862	— 8,57	— 25,71	73,4449	220,32	
5	1955	3	5865	— 7,57	— 22,71	57,3049	171,90	a. — 1G = 9 Einh.
6	1956	1	1956	— 6,57	— 6,57	43,1649	43,16	
7	1957	4	7828	— 5,57	— 22,28	31,0249	124,08	
8	1958	3	5874	— 4,57	— 13,71	20,8849	62,64	
9	1959	7	13713	— 3,57	— 24,99	12,7449	89,18	
10	1960	5	9800	— 2,57	— 12,85	6,6049	33,00	
11	1961	9	17649	— 1,57	— 14,13	2,4649	22,14	
12	1962	4	7848	— 0,57	— 2,28	0,3249	1,28	b. c G = 6 Einh.
13	1963	9	17667	+ 0,43	+ 3,87	0,1849	1,62	
14	1964	8	15712	+ 1,43	+ 11,44	2,0449	16,32	
15	1965	17	33405	+ 2,43	+ 41,31	5,9049	100 30	
16	1966	12	23592	+ 3,43	+ 41,16	11,7649	141,12	
17	1967	9	17703	+ 4,43	+ 39,87	19,6249	176,58	
18	1968	1	1968	+ 5,43	+ 5,43	29,4849	29,48	c. + 1G = 6 Einh.
19	1969	1	1969	+ 6,43	+ 6,43	41,3449	41,34	
20	1970	0	0	0	0	0	0	
21	1971	2	3942	+ 8,43	+ 16,86	71,4649	71,06	
—	$Ob = 21$ Einh.	$N = 100$	$S = 196257$	—	$S - \delta = 166,37$ $S + \delta = 166,37$ $SD = 332,74$	—	SD^2 1570,96	—

Charakteristik.

1. $N = 100.$

2. $Ob = 21.$

3. $M = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}} = \frac{196257}{100} = 1962{,}57.$

4. $cM = \frac{1951 + 1971}{2} = 1961{,}00.$

5. $Oe = \frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{N}} = \frac{332{,}74}{100} = 3{,}33.$

6. $r = 0{,}6745 \times \sqrt{\frac{\mathrm{SD}^2}{\mathrm{N}-1}} = 2{,}68 \left\{ \sqrt{\frac{\mathrm{SD}^2}{\mathrm{N}-1}} = \sqrt{\frac{1570{,}96}{99{,}00}} = \sqrt{15{,}87} = 3{,}98;\ 0{,}6745 \times 3{,}98 = 2{,}684510 \right\}$

7. $R = \frac{\mathrm{r}}{\sqrt{\mathrm{N}}} = \frac{2{,}68}{100} = 0{,}03.$

8. $\begin{Bmatrix} \mathrm{M} - \mathrm{r} = 1962{,}57 - 2{,}68 = 1959{,}89 \\ \mathrm{M} + \mathrm{r} = 1962{,}57 + 2{,}68 = 1965{,}25 \end{Bmatrix}$

9. die drei Variations-Gruppen:

a. — 1G	v. 1951 bis 1959	= 9 Werthgrössen	(8 vertreten)	= 42,86 pCt.	(v. 21 E.)
b. cG	„ 1960 „ 1965	= 6 „	(sämmtl. „)	= 28,57 „	
c. + 1G	„ 1966 „ 1971	= 6 „	(„)	= 28,57 „	
		S = 21 Werthgrössen		= 100,00 pCt.	

10. Vertheilung der Einzelfälle:

a. — 1G	Summe der Einzelfälle	= 23	= 23 pCt. (von 100).
b. cG	„ „ „	= 52	= 52 „
c. + 1G	„ „ „	= 25	= 25 „
	N	= 100 Einzelfälle	= 100 pCt.

11. Vertheilung der Wiederholungen der einzelnen Werthgrössen:

a. — 1G	bei 23 Einzelf.	= 15 Wiederholungen	= 18,52 pCt. (von 81)
b. cG	„ 52 „	= 46 „	= 56,79 „
c. + 1G	„ 25 „	= 20 „	= 24,69 „
	N = 100 Einzelf.	= 81 Wiederholungen	= 100,00 pCt.

12. Vertheilung der Differenzen:

a. — 1G	Summe der Differenzen	= 137,11	= 41,21 pCt. (von 332,74)
b. cG	„ „ „	= 85,88	= 25,81 „
c. + 1G	„ „ „	= 109,75	= 32,98 „
	SD	= 332,74	= 100,00 pCt.

13. Die Zusammensetzung der Zahlenreihe in Bezug auf die symmetrische Vertheilung der Differenzen:

Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: $\left.\begin{array}{r} S - \delta = S + \delta \\ \text{hier: } 166{,}37 = 166{,}37 \end{array}\right\}$ Differenz $= 0$

Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: a. — 1G Sδ = 25 pCt.
hier: a. — 1G Sδ = 41,21 „
Differenz: = + 16,21 pCt.

Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: b cG = 50 pCt.
hier: b cG = 25,81 „
Differenz: = — 24,19 pCt.

Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: c + 1G = 25 pCt.
hier: c + 1G = 32,98 „
Differenz: = + 7,98 pCt.

14. Die Schwankungsbreite, innerhalb welcher die centrale Zahl vorkommen muss:

$$\left.\begin{array}{l} M - R = 1962{,}57 - 0{,}03 = 1962{,}54 \\ M + R = 1962{,}57 + 0{,}03 = 1962{,}60 \end{array}\right\} Ob = 0{,}07 \text{ Einh.}$$

(Siehe Seite 426.)

Charakteristik.

1. $N = 100.$
2. $Ob = 22.$
3. $M = \frac{S}{N} = \frac{196269}{100} = 1962{,}69.$
4. $cM - \frac{1953 + 1974}{2} = 1963{,}50.$
5. $Oe = \frac{SD}{N} = \frac{326{,}10}{100} = 3{,}26.$
6. $r = 0.6745 \times \sqrt{\frac{SD^2}{N-1}} = 2{,}72 \left\{\sqrt{\frac{SD^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{1607.74}{99}} = \sqrt{16{,}24} = 4{,}03;\ 0{,}6745 \times 4{,}03 = 2{,}718235\right\}$
7. $R = \frac{r}{\sqrt{N}} = \frac{2{,}72}{100} = 0{,}03.$
8. $\left\{\begin{array}{l} M - r = 1962{,}69 - 2{,}72 = 1959{,}97 \\ M + r = 1962{,}69 + 2{,}72 = 1965{,}41 \end{array}\right\}$

II. β. Variationen des Gewichtes bei Füllung aus Messcylindern.

Lauf. Nummer	Werthgrössen	Einzelfälle	Summe der einzelnen Werthgrössen	Differenzen von M = 1962,69	Summe der einzelnen Differenzen	Quadrate der einzelnen Differenzen	Summe der Quadrate der einzelnen Differenzen	Variations-Gruppen
1	1953	1	1953	− 9,69	− 9,69	93,90	93,90	
2	1954	1	1954	− 8,69	− 8,69	75,52	75,52	
3	1955	3	5865	− 7,69	− 23,07	59,14	177,42	
4	1956	1	1956	− 6,69	− 6,69	44,86	44,86	a. $-lG$
5	1957	3	5871	− 5,69	− 17,07	32,38	97,14	
6	1958	5	9790	− 4,69	− 23,45	21,99	109,95	
7	1959	9	17631	− 3,69	− 33,21	13,62	122,58	
8	1960	10	19600	− 2,69	− 26,90	7,24	72,40	
9	1961	6	11766	− 1,69	− 10,14	2,86	17,16	
10	1962	6	11772	− 0,69	− 4,14	0,48	2,88	b. cG
11	1963	9	17667	+ 0,31	+ 2,79	0,09	0,81	
12	1964	10	19640	+ 1,31	+ 13,10	1,72	17,20	
13	1965	15	29475	+ 2,31	+ 34,65	5,34	80,10	
14	1966	6	11796	+ 3,31	+ 19,86	10,96	65,76	
15	1967	4	7868	+ 4,31	+ 17,24	18,58	74,32	
16	1968	4	7872	+ 5,31	+ 21,24	28,20	112,80	
17	1969	4	7876	+ 6,31	+ 25,24	39,82	159,28	
18	1970	0	0	0	0	0	0	c. $+lG$
19	1971	1	1971	+ 8,31	+ 8,31	69,06	69,06	
20	1972	1	1972	+ 9,31	+ 9,31	86,68	86,68	
21	1973	0	0	0	0	0	0	
22	1974	1	1974	+ 11,31	+ 11,31	127,92	127,92	
—	Ob = 22 Einh.	N = 100	S = 196269	—	S − δ = 163,05 S + δ = 163,05 SD = 326,10	—	SD^2 = 1607,74	—

(Siehe Charakteristik Seite 425 und 427.)

9. Die drei Variations-Gruppen:

a. — 1 G v. 1953 bis 1959 =	7 Werthgr.	(alle vertreten) =	31,82 pCt.	(v. 22 Einh.)
b. c G „ 1960 „ 1965 =	6 „	(„ „) =	27,27 „	
c. + 2 G „ 1966 „ 1974 =	9 „	(7 „) =	40,91 „	
	S = 22 Werthgr.	=	100,00 pCt.	

10. Vertheilung der Einzelfälle:

a. — 1 G Summe der Einzelfälle	= 23	= 23 pCt.	(von 100).
b. c G „ „ „	= 56	= 56 „	
c. + 1 G „ „ „	= 21	= 21 „	
N	= 100	= 100 pCt.	

11. Vertheilung der Wiederholungen der einzelnen Werthgrössen:

a. — 1 G bei 23 Einzelf.	= 16 Wiederholungen	= 20,00 pCt.	(von 80)
b. c G „ 56 „	= 50 „	= 62,50 „	
c. + 1 G „ 21 „	= 14 „	= 17,50 „	
N = 100 Einzelf.	= 80 Wiederholungen	= 100,00 pCt.	

12. Vertheilung der Differenzen:

a. — 1 G Summe der Differenzen	= 121,87	= 37,37 pCt.	(von 326,10)
b. c G „ „ „	= 91,72	= 28,13 „	
c. + 1 G „ „ „	= 112,51	= 34,50 „	
S D	= 326,10	= 100,00 pCt.	

13. Die Zusammensetzung der Zahlenreihe in Bezug auf die symmetrische Vertheilung der Differenzen:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: } S - \delta = S + \delta \\ \text{hier: } 163{,}05 = 163{,}05\end{array}\right\} \text{Differenz} = 0$$

Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: a. — 1 G S δ = 25 pCt.
hier: a. — 1 G S δ = 37,37 „
Differenz = + 12,37 pCt.

Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: b. c G S δ = 50 pCt.
hier: b. c G S δ = 28,13 „
Differenz = — 21,87 pCt.

Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: c. + 1 G S δ = 25 pCt.
hier: c. + 1 G S δ = 34,50 „
Differenz = + 9,50 pCt.

14. Die Schwankungsbreite, innerhalb welcher die centrale Zahl vorkommen muss:

$$\left.\begin{array}{l}M - R = 1962{,}69 - 0{,}03 = 1962{,}66 \\ M + R = 1962{,}69 + 0{,}03 = 1962{,}72\end{array}\right\} Ob = 0{,}07 \text{ Einh.}$$

B. Füllmaterial: Erbsen.

III.β. Variationen des Gewichts bei nachträglicher Volumens-Bestimmung der Füllung.

Lauf. Nummer	Werthgrössen	Einzelfälle	Summe der einzelnen Werthgrössen	Differenzen von $M = 1126,19$	Summe der einzelnen Differenzen	Quadrate der einzelnen Differenzen	Summe der Quadrate der Differenzen	Variations-Gruppen
1	1115	3	3345	— 11,19	— 33,57	125,22	375,66	
2	1116	0	0	0	0	0	0	
3	1117	3	3351	— 9,19	— 27,57	84,46	253,38	
4	1118	4	4472	— 8,19	— 32,76	67,08	268,32	
5	1119	4	4476	— 7,19	— 28,76	51,70	206,80	a. $-lG$
6	1120	2	2240	— 6,19	— 12,38	38,32	76,64	
7	1121	2	2242	— 5,19	— 10,38	26,94	53,88	
8	1122	7	7854	— 4,19	— 29,33	17,56	122,92	
9	1123	7	7861	— 3,19	— 22,33	10,18	71,26	
10	1124	6	6744	— 2,19	— 13,14	4,80	28,80	
11	1125	4	4500	— 1,19	— 4,76	1,42	5,68	
12	1126	11	12386	— 0,19	— 2,09	0,04	0,44	
13	1127	4	4508	+ 0,81	+ 3,24	0,66	2,64	b. cG
14	1128	3	3384	+ 1,81	+ 5,43	3,28	9,84	
15	1129	5	5645	+ 2,81	+ 14,05	7,90	39,50	
16	1130	12	13560	+ 3,81	+ 45,72	14,52	174,24	
17	1131	5	5655	+ 4,81	+ 24,05	23,14	115,70	
18	1132	6	6792	+ 5,81	+ 34,86	33,76	202,56	
19	1133	7	7931	+ 6,81	+ 47,67	46,38	324,66	c. $+lG$
20	1134	2	2268	+ 7,81	+ 15,62	60,99	121,98	
21	1135	3	3405	+ 8,81	+ 26,43	77,62	232,86	
—	$Ob = 21$ Einh.	$N = 100$	$S = 112619$	—	$S - \delta = 217,07$ $S + \delta = 217,07$ $SD = 434,14$	—	$SD^2 = 2687,76$	—

Charakteristik.

1. $N = 100.$

2. $Ob = 21.$

3. $M = \frac{\text{S}}{\text{N}} = \frac{112619}{100} = 1126{,}19.$

4. $cM = \frac{1115 + 1135}{2} = 1125{,}00.$

5. $Oe = \frac{\text{SD}}{\text{N}} = \frac{434{,}14}{100} = 4{,}34.$

6. $r = 0{,}6745 \times \sqrt{\frac{\text{SD}^2}{\text{N}-1}} = 3{,}51 \left\{\sqrt{\frac{\text{SD}^2}{\text{N}-1}} = \sqrt{\frac{2687{,}76}{99}} = \sqrt{27{,}15} = 5{,}21;\ 0{,}6745 \times 5{,}21 = 3{,}51\right\}$

7. $R = \frac{\text{r}}{\sqrt{\text{N}}} = \frac{3{,}51}{100} = 0{,}04.$

8. $\left\{\begin{array}{l}\text{M} - \text{r} = 1126{,}19 - 3{,}51 = 1122{,}68 \\ \text{M} + \text{r} = 1126{,}19 + 3{,}51 = 1129{,}70\end{array}\right\}$

9. Die drei Variations-Gruppen:

a. — 1G	von 1115 bis 1123 =	9 Werthgr. (8 vertreten) =	42,86 pCt.	(von 21)
b. cG	„ 1124 „ 1130 =	7 „ (alle „) =	33,33 „	
c. + 1G	„ 1131 „ 1135 =	5 „ („ „) =	23,81 „	
	S = 21 Werthgr.		= 100,00 pCt.	

10. Vertheilung der Einzelfälle:

a. — 1G	Summe der Einzelfälle =	32 =	32 pCt.	(von 100).
b. cG	„ „ „ =	45 =	45 „	
c. + 1G	„ „ „ =	23 =	23 „	
	N =	100 =	100 pCt.	

11. Vertheilung der Wiederholungen der einzelnen Werthgrössen:

a. — 1G	bei 32 Einzelf. =	24 Wiederholungen =	30,00 pCt.	(von 80)
b. cG	„ 45 „ =	38 „ =	47,50 „	
c. + 1G	„ 23 „ =	18 „ =	22,50 „	
	N = 100 Einzelf. =	80 Wiederholungen =	100,00 pCt.	

12. Vertheilung der Differenzen:

a. — 1G	Summe der Differenzen =	197,08 =	45,40 pCt.	(von 434,14)
b. cG	„ „ „ =	88,43 =	20,37 „	
c. + 1G	„ „ „ =	148,63 =	34,24 „	
	SD =	434,14 =	100,01 pCt.	

13. Die Zusammensetzung der Zahlenreihe in Bezug auf die symmetrische Vertheilung der Differenzen:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: } S - \delta = S + \delta \\ \text{hier: } 217{,}07 = 217{,}07\end{array}\right\}\text{Differenz} = 0$$

$$\begin{array}{rl}\text{Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: a.} - 1G\ S\delta = 25 & \text{pCt.} \\ \text{hier: a.} - 1G\ S\delta = 45{,}40 & \text{„} \\ \hline \text{Differenz} = + 20{,}40 & \text{pCt.}\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}\text{Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: b. } cG = 50 & \text{pCt.} \\ \text{hier: b. } cG = 20{,}37 & \text{„} \\ \hline \text{Differenz} = - 29{,}63 & \text{pCt.}\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}\text{Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: c.} + 1G = 25 & \text{pCt.} \\ \text{hier: c.} + 1G = 34{,}24 & \text{„} \\ \hline \text{Differenz} = + 9{,}24 & \text{pCt.}\end{array}$$

14. Die Schwankungsbreite, innerhalb welcher die centrale Zahl vorkommen muss:

$$\left.\begin{array}{l}M - r = 1126{,}19 - 0{,}04 = 1126{,}15 \\ M + r = 1126{,}19 + 0{,}04 = 1126{,}23\end{array}\right\}\ Ob = 0{,}09 \text{ Einh.}$$

(Siehe Seite 431).

Charakteristik.

1. $N = 100.$
2. $Ob = 27.$
3. $M = \frac{S}{N}\ \frac{112658}{100} = 1126{,}58.$
4. $cM = \frac{1111 + 1137}{2} = 1124.$
5. $Oe = \frac{SD}{N} = \frac{402.20}{100} = 4{,}02.$
6. $r = 0{,}6745 \times \sqrt{\frac{SD^2}{N-1}} = 3{,}43;\ \left\{\sqrt{\frac{SD^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{2553{,}42}{99}} = \sqrt{25{,}79} = 5{,}08;\ 0{,}6745 \times 5{,}08 = 3{,}426460\right\}$
7. $R = \frac{r}{\sqrt{N}}\ \frac{3{,}43}{100} = 0{,}03.$
8. $\left\{\begin{array}{l}M - r = 1126{,}58 - 3{,}43 = 1123{,}15 \\ M + r = 1126{,}58 + 3{,}43 = 1130{,}01\end{array}\right\}$

IVβ. Variationen des Gewichtes bei Füllung aus Messcylindern.

Lauf. Nummer	Werthgrössen	Einzelfälle	Summe der einzelnen Werthgrössen	Differenzen von $M =$ 1126,58	Summe der einzelnen Differenzen	Quadrate der einzelnen Differenzen	Summe der Quadrate der einzelnen Differenzen	Variations-Gruppen.
1	1111	1	1111	— 15,58	— 15,58	242,74	242,74	
2	1112	0	0	0	0	0	0	
3	1113	0	0	0	0	0	0	
4	1114	1	1114	— 12,58	— 12,58	158,26	158,26	
5	1115	1	1115	— 11,58	— 11,58	134,10	134,10	
6	1116	1	1116	— 10,58	— 10,58	111,94	111,94	a.
7	1117	1	1117	— 9,58	— 9,58	91,78	91,78	— 1G.
8	1118	1	1118	— 8,58	— 8,58	73,62	73,62	
9	1119	0	0	0	0	0	0	
10	1120	4	4480	— 6,58	— 26,32	43,30	173,20	
11	1121	4	4484	— 5,58	— 22,32	31,14	124,56	
12	1122	8	8976	— 4,58	— 36,64	20,78	166,24	
13	1123	6	6738	— 3,58	— 21,48	12,82	76,92	
14	1124	5	5620	— 2,58	— 12,90	6,66	33,30	
15	1125	6	6750	— 1,58	— 9,48	2,50	15,00	
16	1126	6	6756	— 0,58	— 3,48	0,34	2,04	b.
17	1127	10	11270	+ 0,42	+ 4,20	0,18	1,80	c G.
18	1128	8	9024	+ 1,42	+ 11,36	2,02	16,16	
19	1129	10	11290	+ 2,42	+ 24,20	5,86	58,60	
20	1130	5	5650	+ 3,42	+ 17,10	11,70	58,50	
21	1131	5	5655	+ 4,42	+ 22,10	19,54	97,70	
22	1132	3	3396	+ 5,42	+ 16,26	29,38	88,14	
23	1133	7	7931	+ 6,42	+ 44,94	41,22	288,54	c.
24	1134	2	2268	+ 7,42	+ 14,84	55,21	110,42	+ 1G.
25	1135	3	3405	+ 8,42	+ 25,26	70,90	212,70	
26	1136	0	0	0	0	0	0	
27	1137	2	2274	+ 10,42	+ 20,84	108,58	217,16	
	$Ob = 27$ Einh.	$N = 100$	$S = 112658$		$S - d = 201{,}10$ $S + d = 201{,}10$ $SD = 402{,}20$		$SD^2 =$ 2553,42	

(Siehe Seite 430.)

9. Die drei Variations-Gruppen:

a. —lG.	von 1111	bis 1123	= 13 Werthgr.	(10 vertreten)	= 48,15 pCt.	(von 27)
b. cG.	„ 1124	„ 1130	= 7 „	(alle vertreten)	= 25,93 „	
c. +lG.	„ 1131	„ 1137	= 7 „	(6 vertreten)	= 25,93 „	
			S = 27 Werthgr.		= 100,01 pCt.	

10. Vertheilung der Einzelfälle:

a. —lG.	Summe der Einzelfälle	= 28	= 28 pCt.	(von 100)
b. cG.	„ „ „	= 50	= 50 „	
c. +lG.	„ „ „	= 22	= 22 „	
		N = 100	= 100 pCt.	

11. Vertheilung der Wiederholungen der einzelnen Werthgrössen:

a. —lG.	bei 28 Einzelfällen	= 18 Wiederholungen	= 23,38 pCt.	(von 77)
b. cG.	„ 50 „	= 43 „	= 55,84 „	
c. +lG.	„ 22 „	= 16 „	= 20,78 „	
	N = 100 Einzelfälle	= 77 Wiederholungen	= 100,00 pCt.	

12. Vertheilung der Differenzen:

a. —lG.	Summe der Differenzen	= 175,24	= 43,57 pCt.	(von 402,20)
b. cG.	„ „ „	= 82,72	= 20,57 „	
c. +lG.	„ „ „	= 144,24	= 35,86 „	
		SD = 402,20	= 100,00 pCt.	

13. Die Zusammensetzung der Zahlenreihen in Bezug auf die symmetrische Vertheilung der Differenzen:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: } S-d = S+d \\ \text{hier: } 201{,}10 = 201{,}10 \end{array}\right\} \text{Diff.} = 0$$

Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: a. — lG Sδ = 25 pCt.
hier: a. — lG Sδ = 43,27 „
Differenz = + 18,27 pCt.

Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: b. cG Sδ = 50 pCt.
hier: b. cG Sδ = 20,57 „
Differenz = — 29,43 pCt.

Bei vollkommener Gesetzmässigkeit: c. + lG Sδ = 25 pCt.
hier: c. + lG Sδ = 35,86 „
Differenz = + 10,86 pCt.

14. Die Schwankungsbreite, innerhalb welcher die centrale Zahl vorkommen muss:

$$\left.\begin{array}{l} M-R = 1126{,}58 - 0{,}03 = 1126{,}55 \\ M+R = 1126{,}58 - 0{,}03 = 1126{,}61 \end{array}\right\} Ol = 0{,}07 \text{ Einh.}$$

Wenn wir die Charakteristik von einer jeden einzelnen Zahlenreihe näher betrachten, so werden wir das vollkommen bestätigt finden, was wir bereits bei der Betrachtung der

Schwankungsbreiten dieser Zahlenreihen vermuthungsweise ausgesprochen haben. — Bei keiner einzigen derselben kann auf eine Gesetzmässigkeit der Variation mit einer nennenswerthen Wahrscheinlichkeit gefolgert werden; daher sind wir auch nicht im Stande, behufs Aufstellung eines Coëfficienten eine solche Werthgrösse bei ihnen ausfindig zu machen, die sich auf eine bedeutendere Ueberzahl der Einzelfälle bezöge. — Weil aber, wie wir bereits wissen, eine derartige Werthgrösse nur innerhalb der centralen Gruppe der Variation aufgesucht werden kann, so wollen wir zunächst die auf die Beschaffenheit der centralen Gruppe ausschlaggebenden Momente, nehmlich die Werthgrössen von: *Oe*, *r* und *R* vergleichend in Betracht ziehen. — Die folgende Tabelle soll uns diese Vergleichung erleichtern.

Die Werthgrösse des Oscillations-Exponenten, der wahrscheinlichen Abweichung und der Präcisionszahl für die centrale Werthgrösse der Variations-Reihe.

A. Füllmaterial: Glasperlen.

$$\begin{Bmatrix} \text{Bei I}\beta \text{ ist: } Oe = 3{,}33, & r = 2{,}68, & R = 0{,}03 \\ \text{„ II}\beta \text{ „ „} = 3{,}26, & \text{„} = 2{,}72, & \text{„} = 0{,}03 \end{Bmatrix}$$

B. Füllmaterial: Erbsen.

$$\begin{Bmatrix} \text{Bei III}\beta \text{ ist: } Oe = 4{,}34, & r = 3{,}51, & R = 0{,}04 \\ \text{„ IV}\beta \text{ „ „} = 4{,}02, & \text{„} = 3{,}43, & \text{„} = 0{,}03 \end{Bmatrix}$$

Bei der Vergleichung ergiebt sich die interessante Thatsache, dass auch in Bezug auf die Methode der Wägung des Füllmateriales die II. und IV. Versuchsreihe sich am günstigsten erweist, da bei ihnen die Werthgrössen von *Oe* und *r* am kleinsten ausfallen. Wir haben also auch hier den stricten Beweis vor uns, dass, hinsichtlich des Endresultates einer Capacitäts-Bestimmung, das ausschlaggebende Moment stets schon von der Art und Weise der Füllung selbst abhängt, und dass die weitere Behandlung des Füllmateriales (Volumetrie oder Wägung) eigentlich die Vor- und Nachtheile des Verfahrens bei der Füllung nur reproducirt.

Jetzt können wir zur Vergleichung der Charakteristik der centralen Variations-Gruppe selbst übergehen. Zur Erleichterung stelle ich die folgende Tabelle zusammen.

Charakteristik der centralen Variations-Gruppe bei den vier Variations-Reihen der Wägung.

a. Schwankungsbreite.

A. Füllmaterial: Glasperlen.

Iβ = 6 Werthgr. Einheiten = 28,57 pCt. der totalen Ob = 21 Einheiten
IIβ = 6 „ „ = 27,27 „ „ „ „ = 22 „

A. Füllmaterial: Erbsen.

IIIβ = 7 Werthgr. Einheiten = 33,33 pCt. der totalen Ob = 21 Einheiten
IVβ = 7 „ „ = 25,93 „ „ „ „ = 27 „

b. Einzelfälle und Wiederholungen der Werthgrössen.

A. Füllmaterial: Glasperlen.

Iβ bei 52 Einzelfällen (52 pCt.) = 46 Wiederholungen = 56,79 pCt.
IIβ „ 56 „ (56 „) = 50 „ = 62,50 „

B. Füllmaterial: Erbsen.

IIIβ bei 45 Einzelfällen (45 pCt.) = 38 Wiederholungen = 47,50 pCt.
IVβ „ 50 „ (50 „) = 43 „ = 55,84 „

c. Summe der Differenzen und ihre Abweichung von der vollen Gesetzmässigkeit.

A. Füllmaterial: Glasperlen.

Iβ = 25,81 pCt. um 24,19 pCt. geringer als 50 pCt. (vollk. Gesetzmässigkeit)
IIβ = 28,13 „ „ 21,84 „ „ „ 50 „

B. Füllmaterial: Erbsen.

IIIβ = 20,37 pCt. um 29,63 pCt. geringer als 50 pCt.
IVβ = 20,57 „ „ 29,43 „ „ „ 50 „

Bei einer Vergleichung der Charakteristik der centralen Variations-Gruppe müssen wir von den Haupt-Momenten der Gesetzmässigkeit zufälliger Zahlenreihen ausgehen. Je mehr die Gesetzmässigkeit bei einer solchen Zahlenreihe zum Ausdrucke gelangt, caeteris paribus, umso kleiner ist auch die Ausdehnung, d. h. die Schwankungsbreite der centralen Variations-Gruppe. Sonderbarer Weise weist hier die Variations-Reihe *IVβ* die verhältnissmässig kleinste Schwankungsbreite ihrer centralen Gruppe auf, sie entspricht 25,93 pCt. der totalen Variations-Reihe; erst hierauf folgt die Variations-Reihe *IIβ* mit 27,27 pCt. — Ferner tritt bei einer Zunahme der Gesetzmässigkeit eine grössere Anzahl der Einzelfälle, sowie eine häufigere Wiederholung der einzelnen Werthgrössen innerhalb der centralen Gruppe auf. — Die grösste Anzahl der Einzelfälle, sowie die meisten Wiederholungen finden wir in der centralen Gruppe von *IIβ*. Die

Einzelfälle stellen hier 56, und die Wiederholungen 62,50 pCt. von der ganzen Variations-Reihe dar; ihr zunächst kommt die Variations-Reihe *Iβ* mit 52 pCt. Einzelfällen und 56,79 pCt. Wiederholungen, und erst hierauf folgt *IVβ* mit 50 pCt. Einzelfällen und 55,84 pCt. Wiederholungen. Endlich fällt bei einer Zunahme der Gesetzmässigkeit ein grösserer Bruchtheil der Differenzen auf die centrale Gruppe. Bei einer vollkommenen Gesetzmässigkeit müssen von den Differenzen 50 pCt. auf die centrale Gruppe fallen. Wie weit die Variations-Reihen der Wägung hinter dieser Gesetzmässigkeit zurückbleiben, beweist am besten die Thatsache, dass auf die verhältnissmässig noch am günstigsten zusammengesetzte Variations-Reihe *IIβ* nur 28,13 pCt. entfallen, hierauf folgt *Iβ* mit 25,81, dann *IVβ* mit 20,57, und zuletzt *IIIβ* mit 20,37 pCt. — Bei dieser Sachlage kann es doch nicht mehr zweifelhaft sein, dass die Methode der Wägung des Füllmateriales nicht im Mindesten das leisten kann, was man sich von ihr versprochen hat; aber eben deshalb darf man auf die Berechnung eines Coëfficienten behufs einer Capacitäts-Bestimmung aus dem Gewichte des Füllmateriales gar keine besondere Hoffnung setzen. Einem solchen Coëfficienten könnte nur unter der einzigen Bedingung eine präcise Werthigkeit zugesprochen werden, wenn man von ihm mit Bestimmtheit aussagen könnte, dass derselbe für die entschiedene Mehrheit der Einzelfälle das Grössenverhältniss zwischen Volumen und Gewicht ausdrückt. Einen solchen Coëfficienten können wir hier bei keiner einzigen Versuchsreihe der Wägung aufstellen, wie wohl hier die Werthgrösse desselben nicht von 10 (wie man dies bisher für genügend hielt), sondern von 100 Einzelversuchen abstrahirt werden kann. Bei der Volumetrie konnten wir bei denselben 100 Einzelfällen die absolut überwiegende Mehrzahl der Einzelfälle (II a) schon bei zwei einzelnen Werthgrössen allein auffinden.

Also lediglich, um zu zeigen, wie man behufs der Aufstellung eines Coëfficienten verfahren muss, will ich denselben für alle vier Variations-Reihen hier berechnen.

Behufs eines gleichmässigen Verfahrens muss zur Grundlage der Berechnung eines Coëfficienten für alle vier Versuchsreihen eine und dieselbe Werthgrösse (Glied) innerhalb der Variations-Reihen genommen werden. — Hierfür ist am geeignetsten gewiss die centrale Werthgrösse. Da aber ganz genau nur ihre Schwankungsbreite (nämlich zwischen $M—R$ und $M+R$) bekannt ist, muss das arithmetische Mittel von dieser Schwankungsbreite genommen werden $= \frac{(M—R) + (M+R)}{2}$. — Beispielshalber sei hier die zur Grundlage dienende Werthgrösse für die Versuchsreihe $I\beta$ zu berechnen. Hier ist: $M—R = 1962 \cdot 57 — 0 \cdot 03 = 1962 \cdot 54$ und $M+R = 1962 \cdot 57 + 0 \cdot 03 = 1962 \cdot 60$, woraus: $\frac{1962 \cdot 54 + 1962 \cdot 60}{2} = 1962 \cdot 57$ dieser gesuchten Werthgrösse entspricht. — Da andererseits das gegebene, mittels Wasserfüllung bestimmte Volumen $= 1258 \cdot 8$ ist, so wird die Gleichung sein: $=$ *Volumen (V): Gewicht (G) = 1258·8 ccm = 1962,57 g*, woraus die Formel entsteht: $V = \frac{1258 \cdot 80}{1962 \cdot 57} \times G$ oder $V = 0 \cdot 64 \times G$; $0 \cdot 64$ ist also hier der Coëfficient, mit welchem das gefundene jedesmalige Gewicht des Füllmaterials multiplicirt werden muss.

Die Berechnung der Coëfficienten für alle vier Variationen stelle ich kurz im Folgenden zusammen.

A. Füllmaterial: Glasperlen.

Für $I\beta$ Coëfficient $= \frac{1258,80}{1962,57} = 0,641403 = 0,64$, Formel: $V = 0,64 \times G$

„ $II\beta$ „ $= \frac{1258,80}{1962,69} = 0,641364 = 0,64$, „ $V = 0,64 \times G$

B. Füllmaterial: Erbsen.

Für $III\beta$ Coëfficient $= \frac{1258,80}{1126,19} = 1,117751 = 1,12$, Formel: $V = 1,12 \times G$

„ $IV\beta$ „ $= \frac{1258,80}{1126,58} = 1,117364 = 1,12$, „ $V = 1,12 \times G$

Wie wir aus dieser Tabelle ersehen, hängt die Werthgrösse des Coëfficienten unmittelbar von der Werthgrösse der centralen Zahl der Variations-Reihe der einzelnen Wägungen, und somit in weiterer Folge von dem Gewichte des Füllmateriales selbst ab.

Je schwerer ein Füllmaterial ist, um so kleiner muss auch der Coëfficient werden, und so auch umgekehrt. Wie uns auch diese Tabelle belehrt, beruht das ausschlaggebende Moment bei jeder speciellen Methode einer Capacitäts - Bestimmung doch immer nur auf der speciellen Beschaffenheit des Füllmateriales selbst. Andererseits aber belehrt sie uns auch noch darüber, dass eine specielle Veränderung in der Anwendung eines und desselben Füllmateriales (wie z. B. hier, wo die Füllung einmal mit volumetrisch nicht bestimmtem, und das anderemal mit volumetrisch bestimmtem Materiale bewerkstelligt wurde) in der Werthgrösse des Coëfficienten beinahe gar nicht (erst in der vierten decimalen Zahl) zum Ausdrucke gelangt, was also abermals nicht zu Gunsten der Wägungsmethode ausfällt.

Ueber die Berechnung des gesuchten Volumens des Schädel-Innenraumes aus der Volumensgrösse des Füllmateriales.

Es wäre ein sehr bedauerlicher Irrthum, zu meinen, das man für je ein beliebiges — aus soliden Partikelchen bestehendes — Füllmaterial je einen allgemein gültigen constanten Coëfficienten aufstellen könnte, um mittelst desselben das Volumen der Schädelcapacität zu bestimmen. Diese Sachlage, die schon bei einiger Ueberlegung wie von selbst einleuchtend sein muss, kann hier nicht genug betont werden, da man in der Kraniologie von jeher nach einer möglichst erleichterten Ausführung der Arbeit so zu sagen hascht. Man meint im Allgemeinen, dass, wenn irgend ein Verfahren zur Bewirkung eines Zweckes angegeben wird, und namentlich, wenn dies von Seiten einer angesehenen Autorität geschieht, es schon vollkommen genügt, dasselbe schablonenhaft anzuwenden. Es darf hier nicht das Moment der sogenannten „persönlichen Fehler" vergessen werden, — worauf ich schon in den einleitenden Erörterungen die Aufmerksamkeit zu lenken bestrebt war. Nicht nur, dass die Präcision irgend eines Verfahrens für jedermann nicht dieselbe sein kann, dieselbe erweist sich auch noch für einen jeden einzelnen Forscher selbst, — innerhalb gewisser Grenzen —, als veränderlich. Es gebührt Welcker die Anerkennung, dass er bei der Schädelcapacitäts-Bestimmung uns hierauf zum ersten Male aufmerksam gemacht hat. Ich muss hier demnach nochmals besonders betonen, dass, wenn ich, auf Grundlage der von Herrn Kelemen unter meiner Aufsicht ausgeführten Versuche, die Methode der Füllung mit vorher schon volumetrisch bestimmter Glasperlen-Menge als die geeigneteste befürworte, dies nicht in dem Sinne verstanden wissen will, als müsste eben jedermann mittelst dieser Methode zu denselben Resultaten gelangen. Ja, wie ich an dem betreffenden Orte bereits hervorhob, lag es mir gar nicht im Sinne, ein Modell einer forcirten Leistungsfähigkeit aufzustellen. Es schwebte mir nur das vor, ein Verfahren ausfindig zu machen, welches jedermann ohne besondere Anstrengung mit Nutzen anzuwenden im Stande sei. Es schwebte mir also nur eine sogenannte Durchschnittsleistung vor. In einer Durchschnittsleistung ist aber der Begriff von schwankendeu Resultaten schon mit eingeschlossen. Es ist somit ganz klar, dass die von mir vorgeschlagene Methode in den Händen anderer Experimentatoren gewiss auch zu anderen, und vielleicht auch zu noch günstigeren Ergebnissen führen würde, als ich hier aufweisen konnte. Ich brauche deshalb weder eine Kritik, noch weniger aber eine völlige Abweisung für meine Methode befürchten. Höchstens, dass im Gefolge einer Prüfung derselben man auf eine noch viel bessere Methode stossen würde, — was nur im Interesse unserer ohnehin noch im Argen liegenden Disciplin wäre. Soviel im Allgemeinen hinsichtlich des Momentes der persönlichen Fehler. — Was das objective Moment, nehmlich die Beschaffenheit des von mir anempfohlenen Füllmateriales anbetrifft, brauche ich die Beweise seiner Vortheilhaftigkeit hier nicht mehr zu wiederholen.

Nachdem also die Vortheilhaftigkeit desjenigen Verfahrens, bei welcher die Schädelhöhle mittelst einer volumetrisch schon bestimmten Glasperlenmenge gefüllt wurde, durch 100 Einzelversuche bestätigt werden konnte, liess ich diese Methode bei der Capacitäts-Bestimmung von insgesammt 4000 Schädel meiner Sammlung durch Herrn Kelemen anwenden.

Um nun zu erfahren, welchen Schwankungen die Volumens-Bestimmungen bei diesem Verfahren in Folge der persönlichen Fehler unterworfen sind, liess ich allemal je zwei Control-Messungen des Ranke'schen Bronzeschädels ausführen, nehmlich jedesmal, bevor noch eine Serie von knöchernen Schädeln behufs einer Capacitäts-Bestimmung in Angriff genommen wurde, und ebenso jedesmal nach der Beendigung der Capacitäts-Bestimmung von derselben Serie. — Auf diese Weise wurden successive, bis zur Beendigung der Capacitäts-Bestimmung von 4000 Schädeln, insgesammt 142 Control-Messungen des Ranke'schen Bronzeschädels ausgeführt. Ich stelle die Ergebnisse dieser 142 Control-Messungen in derselben Reihenfolge, wie sie gefunden wurden, in der folgenden Tabelle zusammen:

(Siehe Seite 440.)

Berechnungen aus dieser Zahlenreihe.

1. Einzelfälle $N = 142$.
2. Vorkommende Werthgrössen: 1260 ccm und 1265 ccm = 2 einzelne Werthgrössen.
3. Schwankungsbreite der vorkommenden Werthgrössen: 1260—1165 = 6 Einheiten.
4. Häufigkeit der zwei Werthgrössen:

a. 1260 kommt	79 Mal vor	=	55,63 pCt.	von 142
b. 1265 „	63 „ „	=	44,37 „	„ 142
	N = 142	=	100,00 pCt.	

5. Summe der 142 Werthgrössen, $S = 179235$.
6. Arithmetische Mittelzahl $M = \frac{S}{N} = \frac{179235}{142} = 1262,22$ ccm.
7. Die aus den beiden Werthgrössen berechnete centrale Zahl

$$cM = \frac{1260 + 1265}{2} = 1262,50.$$

8. Berechnungen der Differenzen:

a. Differenz der zwei Werthgrössen von der gesuchten Volumensgrösse = 1258,8 ccm.

bei 1260 — 1258,8	= + 1,2,	Werthgrösse des Fehlers	=	1,2 ccm
„ 1265 — 1258,8	= + 6,2,	„ „ „	=	6,2 „
		Schwankungsbreite	=	5,3 ccm Einheiten.

b. Differenz der zwei Werthgrössen von der arithmetischen Mittelzahl = 1262,22.

1262,22 — 1260	= — 2,22,	kommt 79 Mal vor,	S—d = 175,38
1262,22 — 1265	= + 2,78,	„ 63 „ „	S+d = 175,14
		Summe der Differenzen:	SD = 350,52

c. Differenz zwischen der gesuchten Volumensgrösse: 1258,8
und der arithmetischen Mittelzahl 1262,22

Differenz = + 3,42

Volumensgrössen von 142 Control-Messungen der Capacität (1258,8 ccm) des Ranke'schen Bronzeschädels.

Lauf. Nummer	Volumen in ccm	Lauf. Nummer	Volumen in ccm	Lauf. Nummer	Volumen in ccm
1	1260	49	1260	97	1265
2	1265	50	1265	98	1260
3	1260	51	1260	99	1260
4	1265	52	1265	100	1260
5	1265	53	1260	101	1260
6	1265	54	1265	102	1265
7	1265	55	1265	103	1260
8	1260	56	1265	104	1260
9	1260	57	1265	105	1260
10	1265	58	1265	106	1260
11	1260	59	1265	107	1260
12	1265	60	1265	108	1260
13	1260	61	1260	109	1260
14	1260	62	1265	110	1260
15	1260	63	1265	111	1265
16	1260	64	1265	112	1260
17	1265	65	1260	113	1265
18	1265	66	1260	114	1260
19	1260	67	1260	115	1260
20	1265	68	1260	116	1260
21	1265	69	1260	117	1265
22	1265	70	1265	118	1260
23	1265	71	1265	119	1260
24	1265	72	1265	120	1265
25	1265	73	1265	121	1265
26	1260	74	1260	122	1260
27	1265	75	1265	123	1260
28	1265	76	1265	124	1260
29	1260	77	1265	125	1260
30	1265	78	1265	126	1265
31	1265	79	1260	127	1265
32	1265	80	1260	128	1260
33	1365	81	1265	129	1260
34	1265	82	1260	130	1260
35	1260	83	1265	131	1265
36	1260	84	1260	132	1260
37	1260	85	1260	133	1260
38	1365	86	1265	134	1260
39	1260	87	1260	135	1260
40	1265	88	1260	136	1260
41	1260	89	1265	137	1260
42	1265	90	1260	138	1260
43	1260	91	1260	139	1260
44	1260	92	1260	140	1260
45	1260	93	1265	141	1265
46	1260	94	1260	142	1260
47	1260	95	1265		
48	1265	96	1260		

d. Arithmetische Mittelzahl sämmtlicher Differenzen d. i. der Oscillations-Exponent: $Oe = \frac{SD}{N} = \frac{350,52}{142} = 2,47.$

e. Centrale Zahl aus den Differenzen der beiden Werthgrössen von der gesuchten Volumengrösse (1258,8), $cM = \frac{1,2 + 6,2}{2} = \frac{7,4}{2} = 3,7.$

f. Centrale Zahl aus den Differenzen der beiden Werthgrössen von der arithmetischen Mittelzahl (1262,22) $cM = \frac{2,22 + 2,78}{2} = \frac{5,00}{2} = 2,5.$

9. Procentuale Werthgrösse der Fehler (Differenzen) in Bezug auf die gesuchte Volumengrösse (1258,8).

Die Werthgrösse eines Procenten von 125,88 ccm = 12,588 ccm.

a. Procentuale Werthgrösse der Differenz bei den beiden Volumengrössen

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{bei } 1260, & \text{Differenzen} = 1,2, & \frac{1,2}{12,588} & = 0,09532 \text{ pCt.} \\ \text{„ } 1265, & \text{„} \quad = 6,2, & \frac{6,2}{12,588} & = 0,49253 \text{ „} \end{array}\right\}$$

b. Procentuale Werthgrösse der Differenz der arithmetischen Mittelzahl (1262,22) von der gesuchten Volumengrösse (1258,8).

Differenz: $1258,8 - 1262,22 = +3,42, \frac{3,42}{12,588} = 0,27168$ pDt.

10. Correctur oder Coëfficient behufs Berechnung des gesuchten d. h. gegebenen Volumens (= 1258,8 ccm) aus dem gefundenen Volumen mittels der Glasperlen Füllung.

a. Für die eine Werthgrösse mit absoluter Mehrheit der Einzelfälle (55,63 pCt.) ist der Coëfficient: $\frac{1260,0}{1258,8} = 1,00095.$

b. Für die andere Werthgrösse ist der Coëfficient: $\frac{1265,0}{1258,8} = 1,00492.$

c. Für die arithmetische Mittelzahl der ganzen Reihe aus 142 Einzelfällen ist der Coëfficient: $\frac{1262,22}{1258,80} = 1,00270.$

Um das Verständniss dieser Zahlenreihe, sowie der auf dieselbe sich beziehenden Berechnungen zu erleichtern, will ich die folgenden Einzelmomente der Reihe nach anführen.

Zuvörderst will ich bemerken, dass behufs der Volumetrie des Füllmateriales constant dieselben zwei Messcylinder benutzt wurden; der Rauminhalt des grösseren war gleich 1500 ccm, derjenige des kleineren Messcylinders gleich 500 ccm. Die Einheit der Theilung, d. h. ein Theilstrich bedeutet bei den

Messcylindern gleich 5 ccm; somit können bei der Bestimmung des Volumens des Füllmateriales überhaupt nur zweierlei Werthgrössen auftreten, nehmlich paarige und unpaarige Multiplen der Ziffer 5. — Bei der Vergleichung der Werthgrössen dieser Versuchsreihe mit derjenigen der Versuchsreihe *A IIa* (S. 281) bemerkt man, dass einerseits die Anzahl der verschiedenen Werthgrössen hier auf die Hälfte reducirt erscheint (nehmlich auf: 1260 und 1265 = Werthgrössen, während bei *A IIa* die Werthgrössen lauteten: 1268, 1270, 1272, 1274 = 4), andererseits die Werthgrössen zugleich auch kleiner geworden sind, was beides als Folge der voraufgegangenen grösseren Einübung in der Manipulation des ganzen Verfahrens auftrat. — Ferner ist hervorzuheben, dass bei der jetzigen Versuchsreihe die absolute Mehrheit der Einzelfälle auf die geringere Werthgrösse fällt, indem diese Werthgrösse (1260 ccm) 79 Einzelfälle oder 55,63 pCt. der gesammten 142 Einzelfälle in sich vereinigt. Bei diesem Verfahren der Capacitäts-Bestimmung waren somit die Fehler bei etwas mehr als der Hälfte sämmtlicher Einzelmessungen nicht grösser, als = 1,2 (1260 — 1258,8 = + 1,2); die Werthgrösse dieser Fehler entspricht aber nur dem 0,09532. Theile eines Procents der gesuchten Volumengrösse $\left(\frac{1,2}{12,588} = 0,09532 \text{ pCt.}\right)$ — Wie man also sieht, bleiben die Fehler bei diesem Verfahren in mehr als der Hälfte der sämmtlichen Einzelmessungen auffallend weit unterhalb eines Procents = 0,09 pCt. — Aber auch die grössten Fehler blieben bei diesem Verfahren noch immer bedeutend unterhalb eines Procents = 0,49 (für 1265 ist die Differenz von 1258,8 = 6,2, $\frac{6,2}{12,588} = 0,49253$). — Die gesammten Fehler bewegten sich somit bei diesem Verfahren zwischen 1,2 und 6,2 ccm, oder zwischen 0,09 und 0,49 pCt. des gesuchten Volumens. Wie wir auch hier den Beweis vor uns haben, kann das, was von Prof. von Luschan als eine ganz besondere Leistung hinsichtlich seiner Capacitäts-Bestimmung hervorgehoben wurde, und was er gewissermaassen als einen speciellen Fall von der Vorzüglichkeit des Poll'schen Apparates auffasste, auch auf viel einfacherem Wege und ohne jede besondere Mühe erreicht werden.

Weil bei diesen Control-Messungen überhaupt nur zwei einzelne Werthgrössen vorkommen, auf die sich die sämmtlichen Einzel-Messungen vertheilen, so kann aus logischen Gründen das charakteristische Moment einfach schon in derjenigen thatsächlich gefundenen Werthgrösse gesucht werden, in welcher die absolute Mehrheit der Einzel-Messungen vereinigt ist; diese Werthgrösse ist 1260 ccm, mit einer Vertretung von 55,63 pCt. der sämmtlichen Einzelfälle. Ich habe auch deshalb die Zahlenreihen dieser 142 Control-Messungen vor Allem von diesem Gesichtspunkte aus der Analyse unterworfen. Wollte man aber der Schablone zu Liebe diese Zahlenreihe vom Gesichtspunkte der arithmetischen Mittelzahl in Betracht ziehen, so wird man finden, dass man auch auf diese Weise zu ähnlichen Resultaten gelangt.

Wollen wir also, der Vergleichung wegen, diese Zahlenreihe auch vom Gesichtspunkte der arithmetischen Mittelzahl einer Analyse unterwerfen.

Die Werthgrösse der arithmetischen Mittelzahl ist = 1262,22 ccm. Die Differenz von der gesuchten Werthgrösse: 1258,8 — 1262,22 = + 3,42. — Die Differenz, d. h. der Fehler, entspricht hier: $\frac{3,42}{12,588} = 0,27168$ pCt. der gesuchten Volumengrösse, bleibt somit ebenfalls noch bedeutend unterhalb eines ganzen Procents. — Ferner, weil hier die Differenzen zugleich die Fehler der Capacitäts-Bestimmung darstellen, so wollen wir die procentuale Werthgrösse auch für die arithmetische Mittelzahl der sämmtlichen Differenzen, d. h. für den Oscillations-Exponenten $Oe = \frac{SD}{N}$ berechnen. Es ist $Oe = 2,47$, diese Werthgrösse stellt also: $\frac{2,47}{12,588} = 0,19621$ pCt. der gesuchten Volumensgrösse dar.

Wie wir sehen, bleibt die Werthgrösse der Fehler bei diesem Verfahren immer bedeutend unterhalb der Einheit eines Procents der gesuchten Volumensgrösse, so dass man die Fehler bei diesem Verfahren ohne besonderen Schaden ganz vernachlässigen kann, wie dies aus dem folgenden Punkte noch mehr hervorgeht.

Wollte man also bei diesem Verfahren das jeweilig gefundene Volumen präcisiren, so müsste dasselbe immer mit einer, von der Einheit nur sehr wenig differirenden Zahl corrigirt (d. h. multiplicirt) werden; gleichviel, ob man zur Grundlage die zwei vorkommenden Werthgrössen nimmt (für 1260 ccm wäre die Multiplication mit 1,00095 — siehe bei 10a. und für 1265 ccm mit 1,00492 — s. bei 10b.), oder ob man die arithmetische Mittelzahl der ganzen, aus 142 Einzelfällen bestehenden Versuchsreihe zur Grundlage nimmt (nehmlich für 1262,22 ccm mit 1,00270 — s. bei 10c.).

Bei diesem Verfahren ist also der procentuale Werth der Fehler ein so geringer, dass vom praktischen Standpunkte eine Correctur der bei der Messung gefundenen Werthgrössen ohne besonderen Schaden vernachlässigt werden kann. Es genügt zu wissen, dass man es hier mit einem Verfahren zu thun hat, bei welchem die etwaigen (unvermeidlichen) Fehler immer weit unterhalb der Einheit eines Procents der richtigen Volumensgrösse bleiben.

Einige Beobachtungen in Bezug auf das persönliche Moment bei den Capacitäts-Messungen.

Wie ich bereits oben erwähnte, war mein Bestreben bei den von meinem Schüler durchgeführten Capacitäts-Messungen der 4000 Schädel lediglich darauf gerichtet, eine Arbeitsleistung zu statuiren, welche von jedermann ohne besondere Mühe ausgeführt werden kann. — Die Haupt-Aufmerksamkeit wurde bei diesen Capacitäts-Bestimmungen auf eine möglichst behutsame Füllung der zwei Messcylinder mit Glasperlen gerichtet, aus welchen die Schädelhöhle bis zur vollkommenen Füllung vollgestopft wurde. Auf die groben Fehler bei der Füllung der Messcylinder selbst kann man einfach dadurch aufmerksam gemacht werden, dass man an der durchsichtigen Wand der Messcylinder die Unterbrechung, sowie die Anordnung der aneinander gerichteten Glasperlen sehr leicht bemerken kann. Die Füllung darf eben deshalb nicht übereilt werden und nur partieweise erfolgen, wobei man die Füllung, d. h. das Niveau derselben, mittelst einer am senkrechten Stabe (Stopfer) befestigten Metallplatte regulirt. Bei der Füllung des Schädel-

Innenraumes wurde die Aufmerksamkeit lediglich darauf gerichtet, dass das Füllmaterial nach allen Richtungen hin ausgebreitet und alle Winkel und Vertiefungen der endocranialen Oberfläche ausgefüllt werden, bis die Glasperlen an den Oeffnungen der Schädel-Löcher und Canäle ganz deutlich sichtbar wurden, und der Widerstand von Seiten des Füllmateriales eine weitere Füllung unmöglich machte. — Weder die Füllung der Messcylinder, noch die der Schädelhöhle beansprucht demzufolge mehr Aufmerksamkeit und Handfertigkeit, als wie sie von jedermann billigerweise verlangt werden kann. Eine Gleichmässigkeit der Füllung konnte bei diesem Verfahren deshalb mehr angenähert werden, weil die Glasperlen und die zwei Messcylinder immer dieselben blieben.

Bei diesem Vorhaben musste auch ein etwaiger Record für eine möglichst rasche Ausführung der Capacitäts-Messung ausser Rechnung bleiben. — Es ist doch einleuchtend, dass es wichtiger ist, eine Messung ohne besondere Anstrengung möglichst zweckdienlich auszuführen, als auf Kosten dieser die Zeitdauer der Arbeit möglichst zu verkürzen. — Ich kann deshalb für die Wissenschaft gar keinen Nutzen darin erblicken, wenn die betreffenden Kraniologen mit besonderem Nachdrucke betonen, dass es ihnen gelungen ist, innerhalb einer gewissen kurzen Zeit so und so viele Schädelcapacitäts-Messungen auszuführen.

Ich liess den Zeitpunkt des Beginnes und der Beendigung der Capacitäts-Messungen, sowie die Anzahl der während der jedesmaligen Arbeitszeit untersuchten Schädel tagtäglich einfach registriren, ohne meinen Schüler zu einer grösseren Raschheit der Arbeitsverrichtung aufzumuntern; die Aufmunterung und Controlirung beschränkte sich bloss auf die Sorgfalt bei der Arbeit selbst. Die Capacitäts-Messungen wurden an Schultagen Nachmittags und Abends, an Ferientagen auch Vormittags ausgeführt. Die Capacitäts-Messungen der 4000 Schädel wurden im Frühjahre 1898 begonnen und beanspruchten insgesammt 93 Arbeitstage. Die Arbeitsdauer während eines Tages schwankte zwischen 2,5 und 6 Stunden.

Eine einzelne Schädelcapacitäts-Bestimmung, einschliesslich der Vorbereitung der Messcylinder, sowie der Entleerung des Schädels, beanspruchte im Durchschnitte eine Zeitdauer von 6′15″. — Die kürzeste Zeitdauer war = 4′49″, die längste = 9′42″; diese zwei extremen Fälle kamen nur einmal vor. In der überwiegenden Mehrzahl (bei 65 pCt. der Einzelfälle) wurde das ganze Verfahren einer einzelnen Schädelcapacitäts-Bestimmung in einer Zeitdauer von 6′20″ beendigt. Etwa 80 pCt. der Einzelfälle (d. h. etwa 3200 Schädel) wurden in den Nachmittags- und Abendstunden gemessen; somit hat mein Schüler diese Arbeit zumeist schon mit einer Belastung in Folge von voraufgegangener geistiger Beschäftigung (Vorlesungen u. s. w.) in Angriff genommen. Das Moment dieser Belastung kam auch in der Verlängerung der Zeitdauer der einzelnen Schädelcapacitäts-Messungen ganz deutlich zum Ausdrucke. Denn während bei den in den Vormittagsstunden der Ferientage unternommenen Messungen eine einzelne Capacitäts-Bestimmung im Durchschnitte eine Zeitdauer von 6′13″ beanspruchte, erforderte dies in den Nachmittags- und Abendstunden der Schultage (zumeist auch bei künstlicher Beleuchtung) eine durchschnittliche Zeitdauer von 6′29″.

Ich habe in der Einleitung dieses Aufsatzes auf das in unserem Wesen begründete Bestreben nach einer Vereinheitlichung der Methoden bei wissenschaftlichen Forschungen hingewiesen. Wer die Entwickelungs-Geschichte unserer Disciplin mit Aufmerksamkeit verfolgte, musste die Zeichen dieses Bestrebens ganz deutlich erkennen. Anfangs äusserte sich dieses Bestreben dadurch, dass man die Methode irgend eines Meisters gleichförmig, so zu sagen blindlings befolgte „in verba jurare magistri“; als späterhin die Periode eines sogenannten Wettkampfes der einzelnen Autoritäten, bezw. ihrer verschiedenen Methoden eintrat, musste man schon zu Vereinigungen, sogenannten Verständigungen Zuflucht nehmen, um ein einheitliches Verfahren, wenigstens bei einer grösseren Anzahl von Adepten, sichern zu können, — und unsere Disciplin steht auch noch heut zu Tage unter diesem mächtigen Einflusse. Jedoch konnte eine wahre Vereinheitlichung weder durch den Einfluss der einzelnen Autoritäten, noch ihrer durch Vereinigung verstärkten Parteien zu Stande gebracht werden, weil sich hiergegen ein anderer, nicht minder mächtiger, elementarer Trieb unseres Geistes auflehnte, nehmlich der unbezwingbare Freiheitsdrang bei wissenschaftlicher Befriedigung. — Wir können nicht anders, wir müssen so lange unsere Geisteskräfte erproben, bis es uns gelungen ist, die Hindernisse eines gegebenen Problems auch wirklich zu bewältigen. Ich erblicke deshalb in den nie rastenden Versuchen nach Neuerungen, bezw. nach Veränderung der alten Methoden, — die speciell unserer Disciplin derzeit noch den Charakter einer möglichst grossen Divergenz der Denkweise verleihen, das mächtigste Hülfsmittel zur wirklichen Förderung des Zieles einer Vereinheitlichung unserer Gedanken und unserer Thätigkeit, weil alle diese Neuerungen zur Erweiterung unserer Kenntnisse beitragen und dies die unerlässliche Vorbedingung eines geistigen Vereinheitlichungs-Processes ist.

XIX.

Ueber die Beziehungen der Myocarditis zu den Erkrankungen der Arterienwandungen.

(Aus dem Pathologischen Institut der Universität Strassburg i. E.)

Von

Dr. med. A. Fujinami aus Japan.

(Hierzu Tafel XII.)

Eine eingehende und bedeutungsvolle Discussion über die Entstehung der Myocarditis datirt erst seit den letzten Decennien. In neuerer Zeit wurde viel Gewicht auf die Erkrankung der Kranzarterien als ätiologisches Moment gelegt. Unter der von vielen Seiten anerkannten Voraussetzung, dass die Kranzarterien Endarterien im Cohnheim'schen Sinne sind, hat man den Schluss gezogen, dass die Erkrankung, bezw. Verschliessung der Kranzarterien besonders geeignet ist, einen myocarditischen Heerd zu erzeugen. Von den Erkrankungen der Kranzarterien wurde aber die Arteriosklerose, da sie bei weitem am häufigsten vorkommt, als die Ursache der Angina pectoris oder Stenocardie von vielen Seiten (Jenner, Berg u. s. w.) bezeichnet. Alsdann wurde es